Ondrej Bartl *

EKONOMICKY EFEKTÍVNE RIADENIE ZÁSOB V PODMIENKACH RIZIKA

COST-EFFECTIVE INVENTORY CONTROL UNDER RISK

Zásobovacie systémy zohrávajú významnú úlohu v organizáciách výroby a služieb pri podporovaní plynulosti výroby alebo obsluhy. Vývoj v čase a prostredie rizika obvykle charakterizujú činnosť takýchto systémov. Náležité riadiace pravidlá sú potrebné pre rozhodovanie o doplňujúcich objednávkach. Ak stochastická dynamika vývoja systému vykazuje markovovskú vlastnosť, potom na odhalenie ekonomicky efektívnej stratégie riadenia zásob možno použiť Markovove rozhodovacie modely. V článku je predstavený jednopoložkový zásobovací systém s periodickou kontrolou v údržbárskom stredisku výrobnej alebo dopravnej organizácie, v ktorom dopytové požiadavky na náhradné komponenty tvoria Poissonov vstupný tok. Pre sekvenčné rozhodovanie o veľkostiach objednávok počas nekonečného plánovacieho horizontu je popísaný príslušný Markovov rozhodovací model s diskrétnym časom a konečným stavovým a riadiacim priestorom. Stredná hodnota priemerných nákladov za jednotku času (pri dlhodobom fungovaní systému) je kritériom optimality, ktoré má minimalizovať optimálna stratégia riadenia zásob.

Kľúčové slová: *Markovove rozhodovacie procesy, riadenie zásob, zásobovacie systémy s periodickou kontrolou*

Inventory systems play an important role in manufacturing and service providing organisations to support fluency of production or service. Evolution in time and environment of risk usually characterise operation of such systems. Proper control rules are required for decision making on replenishment orders. If stochastic dynamics of system motion exhibits the Markovian property, then Markov decision models can be employed to reveal a cost-effective inventory control policy. A single-item periodic-review inventory system in the maintenance centre of a manufacturing or transportation organisation with a Poisson arrival stream of demand requirements for spare components is introduced in the paper. The corresponding discrete-time Markov decision model with finite state and action spaces is described for sequential decisions on order sizes over an infinite planning horizon. The long-run expected average cost per unit time is the criterion of interest to be minimised by an optimal inventory control policy.

Keywords: *Markov decision processes, inventory control, periodic-review inventory systems*

1. Riadenie zásob

V mnohých výrobných alebo dopravných organizáciách vzniká problém určenia vhodnej stratégie zásobovania náhradnými komponentmi, aby bola zabezpečená prevádzkyschopnosť výroby či obsluhy. Stredisko technickej údržby musí mať k dispozícii primeraný počet náhradných komponentov na promptné vykonávanie opráv výrobných alebo obslužných zariadení. Pred zásobovacím dispečerom údržbárskeho strediska stojí otázka, kedy a koľko komponentov objednávať. Správna odpoveď na túto otázku môže výrazne znížiť prevádzkové náklady. Ak úroveň zásob náhradných komponentov je príliš vysoká, súvisiace skladovacie náklady (obvykle spojené s platbou úrokových sadzieb za finančné prostriedky viazané v zásobách) predražujú činnosť systému. Na druhej strane, ak je úroveň zásob príliš nízka, existuje veľké riziko nedostatku náhradných komponentov v požadovanom čase. To znamená, že v prípade výskytu poruchy výrobné či obslužné zariadenie nemožno opraviť, čo má za následok finančnú stratu z výpadku produkcie alebo obsluhy.

1. Inventory control

In many manufacturing or transportation organisations the problem arises to determine an appropriate inventory policy for spare components in order to ensure production/service operation ability. A proper number of spare components must be available in the maintenance centre of the organisation to repair production/service facilities promptly. An inventory dispatcher in the maintenance centre is confronted with the question when and how many components to order. A sophisticated answer to this question can reduce operation costs in a crucial way. If the inventory level of spare components is too high, the corresponding holding costs (usually associated with payments of interest rates for financial resources fixed in the inventory) overcharge the system operation. On the other hand, if the inventory level is too low, there is a great risk of lacking spare components in the time required. This means that in a failure-occurrence case the production/service facility cannot be repaired, which results in a financial loss due to production or service breakdown.

* **Ing. Ondrej Bartl, PhD.,**
Department of Special Technologies, Faculty of Management Science and Informatics, University of Žilina, Veľký diel, SK-010 26 Žilina, Slovak Republic, Tel.: +421-89-5134 133, Tel./Fax: +421-89-5254 613, E-mail: bartl@kst.fri.utc.sk

Zásobovacie systémy pôsobia v čase – sú teda dynamické. Ich vývoj je ovplyvňovaný náhodami (čas výskytu poruchy výrobného či obslužného zariadenia nemožno vopred naplánovať). V svojej podstate sú teda zásobovacie systémy stochastické. Pôsobia v prostredí rizika. Vývoj systému v podmienkach rizika odráža skutočnosť, že náhodné faktory majúce vplyv na správanie systému sú popísané nejakými (plne identifikovanými) rozdeleniami pravdepodobnosti. Ak pravdepodobnostné zákony vývoja – ktorým podlieha stochastická dynamika zásobovacích systémov – vyhovujú markovovskej vlastnosti, problém určenia vhodnej ekonomicky efektívnej zásobovacej stratégie možno formulovať ako Markovov rozhodovací problém. Vývoj systému, riadený vybranou stratégiou riadenia, je potom reprezentovaný riadeným náhodným procesom, ktorý spĺňa markovovskú vlastnosť. Taký proces – označovaný ako Markovov rozhodovací proces – má svoju budúcnosť závislú len od prítomného stavu systému a následne prijatého riadiaceho zásahu ale nie od minulej histórie vývoja systému.

Rozhodnutia o doplňujúcich objednávkach možno považovať za rozhodnutia o (technologických) operáciách. Sústava riadiacich pravidiel, určujúcich či a koľko náhradných komponentov objednať, je potom stratégiou pre dynamické riadenie operácií v podmienkach rizika.

Pri určovaní stratégie riadenia v stochastických dynamických systémoch treba brať do úvahy dve skutočnosti:

- vplyv aktuálnych rozhodnutí na budúce rozhodovacie situácie,
- existenciu množiny náhodných odoziev systému na riadiaci zásah.

Vzhľadom na ekonomické dôsledky riadiacich zásahov sa na porovnanie stratégií používa kritérium strednej hodnoty priemerných nákladov za jednotku času. Cieľom je nájsť stratégiu riadenia zásob minimalizujúcu hodnotu kritéria pre každú počiatočnú úroveň zásob. Teória Markovových rozhodovacích procesov môže pomôcť odhaliť takú stratégiu v prípade markovovskej dynamiky systému.

2. Zásobovací systém v stredisku údržby

Predmetom úvah je zásobovací systém v údržbárskom stredisku výrobnej alebo dopravnej organizácie, kde sa v sklade uchováva jeden typ náhradných komponentov (napr. motorov alebo riadiacich jednotiek strojov). Náhodný charakter dopytu po komponentoch je typickou črtou takého systému.

2.1 Vymedzenie zásobovacieho systému

Úroveň zásob na sklade sa vyhodnocuje v pravidelných časových okamihoch (napr. každý mesiac). Po zistení aktuálnej úrovne zásob sa prijíma riadiace rozhodnutie o doplňujúcej objednávke náhradných komponentov. Časové okamihy, kedy sa zisťuje stav zásob a následne prijíma rozhodnutie o riadiacom zásahu, sa nazývajú okamihmi rozhodovania. Časové intervaly medzi po sebe nasledujúcimi okamihmi rozhodovania sú tzv. intervaly kontroly alebo etapy s rovnakou dĺžkou trvajúcou jednu časovú jednotku.

Inventory systems act in time – hence, they are dynamic. Their evolution is influenced by hazards (the occurrence time of a production/service facility failure cannot be planned beforehand). Thus, in nature inventory systems are stochastic. They act in an environment of risk. System evolution under risk reflects a fact that random factors, having their impact on the system behaviour, are described by some (fully identified) probability distributions. If probabilistic laws of motion – which underlie stochastic dynamics of inventory systems – follow the Markovian property, the problem to determine an appropriate cost-effective inventory policy can be formulated as a Markov decision problem. A controlled random process that satisfies the Markovian property then represents evolution of the system, directed by a control policy chosen. Such a process – referred to as the Markov decision process – has its future dependent only on the present state of the system and a subsequent control action taken, but not on the past history of the system motion.

Decisions on replenishment orders can be regarded as decisions on (technological) operations. The set of control rules, specifying whether or not and how many spare components to order, is then a policy for dynamic operations management under risk.

When determining a control policy in stochastic dynamic systems, two facts must be taken into account:

- the impact of current decisions on future decision making situations,
- the existence of a set of random responses of the system to a control action.

Due to economic consequences of control actions the criterion of the expected average cost per unit time is taken to compare policies. The objective is to find an inventory control policy minimising the criterion value for each initial inventory position. The theory of Markov decision processes can help to reveal such a policy in the case of the Markovian system dynamics.

2. An inventory system in a maintenance centre

An inventory system in the maintenance centre of a manufacturing or transportation organisation is considered, where one type of spare components (e.g. engines or control units of machines) is held in stock. Random nature of demand for components is a typical feature of such a system.

2.1 The inventory system specification

The inventory level in stock is reviewed at regular points of time (e.g. each month). After observing the current inventory position a control decision on the replenishment order of spare components is made. Time points, when the inventory position is reviewed and a subsequent decision on the control action is taken, are decision epochs. Time intervals between consecutive decision epochs are so called review intervals or stages with the same duration of unit time. Stages are numbered by non-negative integers

Etapy sú číslované nezápornými celými číslami štartujúc od 0, ktorá je použitá pre počiatočnú etapu. Čas, kedy sa začína proces riadenia zásob, je 0. Rozhodnutia o veľkosti doplňujúcej objednávky sa teda v tomto jednopoložkovom zásobovacom systéme s periodickou kontrolou vykonávajú v ekvidištančných časových bodoch 0, 1, 2, …. Predpokladá sa, že dodávka objednaného množstva sa prijíma na sklad vo veľmi krátkej oneskorovacej dobe po objednávke. To je s určitou mierou idealizácie reprezentované nulovou dodacou lehotou.

Systém má konečný kladný skladovací limit L vzhľadom na obmedzenú kapacitu skladu. Ak dopyt počas intervalu kontroly prevýši zásobu, ktorá je k dispozícii na sklade, vznikne deficit. Pre situácie nedostatku zásob sa uvažuje s konečným nezáporným limitom deficitu K. Ak aktuálna úroveň zásob je $-K$, odmietajú sa nové požiadavky na náhradné komponenty. Stav zásob sa teda môže pohybovať v rámci množiny hodnôt od $-K$ po L. Záporné celé čísla zodpovedajú registrovanej veľkosti deficitu. Registrovaný deficit zásob je vyplnený okamžite po prijatí dodávky.

Ekonomické dôsledky činnosti zásobovacieho systému sa odrážajú v nákladoch vynaložených počas intervalov kontroly. Predpokladá sa, že príslušné nákladové funkcie sú časovo homogénne. Závisia od stavu zásob a následného riadiaceho zásahu v aktuálnom okamihu rozhodovania. Očakáva sa dlhodobé pôsobenie systému v nemeniacich sa dopytových a finančných podmienkach. Proces riadenia zásob prebieha potom v rámci nekonečného plánovacieho horizontu.

2.2 Proces dopytu

Stredisko údržby musí koordinovať úroveň zásob náhradných komponentov držaných na sklade s náhodným charakterom dopytu. Požiadavky na náhradné komponenty prichádzajú do údržbárskeho strediska takým spôsobom, že doby medzi príchodmi sú nezávislé a rovnako rozložené nezáporné náhodné veličiny $V_k \equiv V$, $k = 1, 2, \ldots$, s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti. Každá požiadavka prichádzajúca do strediska údržby je požiadavkou len na presne jeden náhradný komponent. S použitím spoločnej distribučnej funkcie $G(t) = P\{V \le t\} = P\{V_k \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots, 0 < \lambda < \infty$, možno ľahko overiť, že

$$P\{V > t + z \,|\, V > t\} = P\{V > z\}, \ \forall\, t, z \ge 0. \qquad (1)$$

Rovnica (1) je matematickým vyjadrením bezpamäťovej vlastnosti exponenciálneho rozdelenia. Ak $U = V - t$ označuje zvyšok doby medzi príchodmi V, potom vlastnosť (1) dáva

$$P\{U > z \,|\, V > t\} = P\{V > z\}, \ \forall\, t, z \ge 0. \qquad (2)$$

To znamená, že zvyšok (U) doby medzi príchodmi má rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti ako samotná doba medzi príchodmi (V) nezávisle od toho, koľko času (t) už uplynulo od posledného príchodu. Náhodná veličina, ktorá predstavuje časový interval medzi okamihom rozhodovania a prvým príchodom dopytovej požiadavky po výbere rozhodnutia, má teda exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou $1/\lambda$ bez ohľadu na

starting with 0 used for the initial stage. Time of the beginning of the inventory control process is 0. Thus, decisions on the replenishment order size are made at equidistant time points 0, 1, 2, … in this single-item periodic-review inventory system. The delivery of the amount ordered is supposed to be received in stock in a very short lead-time after the order. With some level of idealisation it is represented by a zero delivery lag.

The system has a finite positive storage limitation L due to the limited capacity of the stock. If the demand in a review interval exceeds the inventory of stock on hand, a shortage occurs. A finite non-negative deficit limitation K is considered for the lack-of-inventory situations. In case the current inventory position is $-K$, new demand requirements for spare components are rejected. Hence, the inventory position can range within the set of values from $-K$ to L. Negative integers correspond to the registered amount of shortage. The registered inventory deficit is filled immediately after the delivery receipt.

Economic consequences of the inventory system operation are reflected in costs incurred during review intervals. The corresponding cost functions are supposed to be time homogeneous. They depend on the inventory position and the subsequent control action at a current decision epoch. The system is expected to act under unchanged demand and financial conditions for a long time. The inventory control process then runs in an infinite planning horizon scheme.

2.2 The demand process

The maintenance centre has to co-ordinate the inventory level of spare components held in stock with the random nature of demand. Requirements for spare components arrive into the maintenance centre in such a manner that interarrival times are independent and identically distributed non-negative random variables $V_k \equiv V$, $k = 1, 2, \ldots$, with an exponential probability distribution. Each requirement, arriving into the maintenance centre, is a requirement for exactly one spare component only. Using the common probability distribution function $G(t) = P\{V \le t\} = P\{V_k \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots, 0 < \lambda < \infty$, it can be easily verified that

$$P\{V > t + z \,|\, V > t\} = P\{V > z\}, \ \forall\, t, z \ge 0. \qquad (1)$$

Equation (1) is a mathematical representation of the memoryless property of the exponential distribution. If $U = V - t$ denotes the rest of the interarrival time V, then the property (1) yields

$$P\{U > z \,|\, V > t\} = P\{V > z\}, \ \forall\, t, z \ge 0. \qquad (2)$$

It means that the rest (U) of the interarrival time has the same probability distribution as the interarrival time (V) itself independently on how much time (t) has already elapsed since the last arrival. Hence, a random variable representing the time interval between a decision epoch and the first demand requirement arrival after the decision choice has the exponential probability distribution with mean $1/\lambda$ no matter whether the decision epoch cointo, či sa okamih rozhodovania kryje s časom predošlého príchodu alebo nie. Nech v každom intervale kontroly označuje Y_k množstvo času od začiatku intervalu kontroly do príchodu k-tej dopytovej požiadavky po okamihu rozhodovania. Veličina Y_k je súčtom k nezávislých a rovnako rozložených exponenciálnych náhodných veličín, čo indukuje k-Erlangovo rozdelenie u náhodnej veličiny Y_k. Zodpovedajúca distribučná funkcia G_k a hustota pravdepodobnosti g_k sú dané vzťahmi

cides with a previous arrival time or not. Let, in each review interval, Y_k denote the amount of time from the beginning of the review interval to the k-th demand requirement arrival after the decision epoch. The quantity Y_k is a sum of k independent and identically distributed exponential random variables, which induces an Erlang-k distribution for the random variable Y_k. The corresponding probability distribution function G_k and the probability density function g_k are stated by

$$G_k(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad g_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \lambda > 0, t \geq 0, k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Pretože $G_k(t) = \int_0^t g_k(u)du, \ t \geq 0, \ k = 1, 2, \ldots,$ platí pre k-Erlangovo rozdelenie nasledujúca identita:

As $G_k(t) = \int_0^t g_k(u)du, \ t \geq 0, \ k = 1, 2, \ldots,$ the following identity holds for the Erlang-k distribution:

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!} du = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad t \geq 0, k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Aby sme našli rozdelenie pravdepodobnosti pre veľkosť dopytu v jednotlivých intervaloch kontroly, využijeme pojem procesu obnovy.

Nech $V_0 \equiv 0$. Ak $\{V_k, k = 1, 2, \ldots\}$ je postupnosť nezávislých a rovnako rozložených nezáporných náhodných veličín, potom počítací proces $\{N(t), t \geq 0\}$ taký, že

To find the probability distribution for the size of demand in particular review intervals, we use a concept of the renewal process.

Let $V_0 \equiv 0$. If $\{V_k, k = 1, 2, \ldots\}$ be a sequence of independent and identically distributed non-negative random variables, then the counting process $\{N(t), t \geq 0\}$ such that

$$N(t) = \sup\left\{n : n \in \{0, 1, \ldots\}, \sum_{k=0}^{n} V_k \leq t\right\}, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

je procesom obnovy. Náhodná veličina V_k označuje dobu medzi výskytom $(k-1)$-vej a k-tej obnovy, $k = 1, 2, \ldots$, kde štart procesu v čase 0 sa interpretuje ako 0-tá (t. j. nepravá) obnova. Náhodná veličina $N(t)$ predstavuje počet obnov do času t, čiže $N(t)$ počíta výskyty obnovy v časovom intervale $\langle 0, t\rangle$. Čas výskytu k-tej obnovy ja daný náhodnou veličinou $S_k = \sum_{i=1}^{k} V_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

is a renewal process. The random variable V_k denotes the interoccurrence time between the $(k-1)$-st and k-th renewal, $k = 1, 2, \ldots$, where the start of the process at time 0 is interpreted as the 0-th (i.e. dummy) renewal. The random variable $N(t)$ represents the number of renewals up to time t; i.e. $N(t)$ counts renewal occurrences in the time interval $\langle 0, t\rangle$. The k-th renewal occurrence time is given by the random variable $S_k = \sum_{i=1}^{k} V_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

Keďže časové intervaly medzi po sebe nasledujúcimi príchodmi dopytových požiadaviek na náhradné komponenty v údržbárskom stredisku sú nezávislé a rovnako rozložené nezáporné náhodné veličiny V_k, $k = 1, 2, \ldots$, s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou $1/\lambda$, možno každý príchod považovať za výskyt obnovy. Čas $S_k = V_1 + V_2 + + \ldots + V_k$ k-teho príchodu má k-Erlangovo rozdelenie so strednou hodnotou k/λ, ktorého distribučná funkcia $P[S_k \leq t] = G_k(t)$ je určená v (3) pre $t \geq 0$ a $k = 1, 2, \ldots$. Nech V_0 je identicky rovné nule. Náhodná veličina $N(t)$, vyhovujúca rovnici (5), predstavuje počet príchodov do času t. Nech $S_0 \equiv 0$ a $G_0(t) = P[S_0 \leq t]$, $t \geq 0$. Potom $G_0(t) = P[0 \leq t] = 1$, $t \geq 0$. Uvedomiac si, že

As time intervals between consecutive arrivals of demand requirements for spare components in the maintenance centre are independent and identically distributed non-negative random variables V_k, $k = 1, 2, \ldots$, with the exponential distribution with mean $1/\lambda$, each arrival can be regarded as a renewal occurrence. The time $S_k = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$ of the k-th arrival has the Erlang-k distribution with mean k/λ, whose probability distribution function $P[S_k \leq t] = G_k(t)$ is specified by (3) for $t \geq 0$ and $k = 1, 2, \ldots$. Let V_0 be identically equal to zero. The random variable $N(t)$ satisfying equation (5) represents the number of arrivals up to time t. Let $S_0 \equiv 0$ and $G_0(t) = P[S_0 \leq t]$, $t \geq 0$. Then $G_0(t) = P[0 \leq t] = = 1$, $t \geq 0$. Noting that

$$N(t) \geq k \Leftrightarrow S_k \leq t, \quad t \geq 0, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

možno odvodiť pravdepodobnostnú funkciu pre počet $N(t)$ náhradných komponentov požadovaných do času t takto:

the probability mass function for the number $N(t)$ of spare components that have been required up to time t can be derived as follows

$$P[N(t) = k] = P[N(t) \geq k] - P[N(t) \geq k + 1] = P[S_k \leq t] - P[S_{k+1} \leq t] = G_k(t) - G_{k+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, t \geq 0. \tag{6}$$

To dokazuje, že náhodná veličina $N(t)$ má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou λt, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Náhodný proces príchodov dopytových požiadaviek do údržbárskeho strediska je teda Poissonovým procesom $\{N(t), t \geq 0\}$ s intenzitou λ náhradných komponentov za jednotku času, čo je špeciálny prípad procesu obnovy.

Poissonov proces sa regeneruje v ľubovoľnom bode času. Takže pre ľubovoľné pevné $s \geq 0$ je proces $\{N'(t), t \geq s\}$ s $N'(t) = N(t) - N(s)$ pravdepodobnostnou kópiou procesu $\{N(t), t \geq 0\}$. Počet príchodov od času s do času t má teda rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti ako počet príchodov od času 0 do času $t - s$ bez akejkoľvek závislosti od vývoja procesu od štartu v čase 0 do času s. Podrobnosti pozri v dodatku na konci článku.

Nech Z_t označuje veľkosť dopytu v intervale kontroly medzi časmi t a $t + 1$, kde $t \in \{0, 1, \dots\}$. Z regeneratívnej vlastnosti Poissonovho procesu vyplýva, že veličiny Z_t, pohybujúce sa v rámci množiny hodnôt $Z = \{0, 1, \dots\}$, sú nezávislé a rovnako rozložené náhodné veličiny so spoločnou pravdepodobnostnou funkciou:

This verifies that the random variable $N(t)$ has the Poisson distribution with mean λt, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Hence, the random process of demand requirement arrivals into the maintenance centre is the Poisson process $\{N(t), t \geq 0\}$ with rate λ spare components per unit time, which is a special case of a renewal process.

The Poisson process regenerates itself at any point in time. Thus, for arbitrary fixed $s \geq 0$ the process $\{N'(t), t \geq s\}$ with $N'(t) = N(t) - N(s)$ is a probabilistic replica of the process $\{N(t), t \geq 0\}$. That is, the number of arrivals from time s to time t has the same probability distribution as the number of arrivals from time 0 to time $t - s$ without any dependence on the process evolution since the start at time 0 till time s. See an appendix at the end of the paper for details.

Let Z_t denote the demand size in the review interval between times t and $t + 1$, where $t \in \{0, 1, \dots\}$. The regenerative property of the Poisson process implies that the quantities Z_t, ranging within the set of values $Z = \{0, 1, \dots\}$, are independent and identically distributed random variables with the common probability mass function:

$$q(k) = P\{Z_t = k\} = P\{N(t+1) - N(t) = k\} = P\{N(1) = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in Z = \{0, 1, \dots\}, t \in \{0, 1, \dots\}. \tag{7}$$

Aplikovaním rovnice (A4) založenej na rovnici (A3) z dodatku článku je odôvodnené použitie vzťahu $P\{N(t+1) - N(t) = k\} = P\{N(1) = k\}$ pre $k \in Z$ a $t = 0, 1, \dots$ v (7). Rovnica (7) odráža stacionárny charakter procesu dopytu v uvažovanom zásobovacom systéme.

Vzhľadom na vzájomnú nezávislosť náhodných veličín Z_t, reprezentujúcich dopyty v intervaloch kontroly, determinuje pravdepodobnostné zákony vývoja systému markovovská vlastnosť. Finančný výsledok správania systému sa meria strednou hodnotou dlhodobých priemerných nákladov za jednotku času. Sústava pravidiel pre postupné rozhodnutia o doplňujúcich objednávkach tvorí stratégiu riadenia zásob s periodickou kontrolou. Pre nájdenie ekonomicky efektívnych riadiacich pravidiel je potrebné zostaviť príslušný Markovov rozhodovací model s diskrétnym časom.

An application of equation (A4) based on equation (A3) from the appendix of the paper justifies the use of the relation $P\{N(t+1) - N(t) = k\} = P\{N(1) = k\}$ for $k \in Z$ and $t = 0, 1, \dots$ in (7). Equation (7) reflects the stationary nature of the demand process in the inventory system under consideration.

Because of mutual independence of the random variables Z_t, representing demands in review intervals, the Markovian property underlies probabilistic laws of the system motion. The financial outcome of the system behaviour is measured by the long-run expected average cost per unit time. The set of rules for sequential decisions on replenishment orders constitutes a periodic-review inventory control policy. To find cost-effective control rules, the corresponding discrete-time Markov decision model must be built.

3. Zodpovedajúci Markov rozhodovací model riadenia zásob

Rozhodovací model markovovského typu je zostavený, ak sú definované stavové a riadiace premenné, špecifikovaný je stavový priestor a priestor riadení, určené sú pravdepodobnosti prechodu a funkcia (strednej hodnoty) nákladov a formulované je kritérium optimality.

Časová množina T systému je množina

$$T = \{0, 1, \dots\},$$

čo zodpovedá množine okamihov rozhodovania, ako aj množine etáp, t. j. množine poradových čísel intervalov kontroly. Pre každé $t \in T$ je etapa t intervalom kontroly medzi okamihmi rozhodovania t a $t + 1$, ktorý sa označuje ako t-ty interval kontroly.

3. The corresponding Markov decision model of inventory control

The decision model of a Markovian type is built up when the state and action variables are defined, the state and action spaces are specified, the transition probabilities and the (expected) cost function are determined and the criterion of interest is formulated.

The time set T of the system is the set

$$T = \{0, 1, \dots\},$$

which corresponds to the set of decision epochs as well as to the set of stages, i.e. to the set of ordinal numbers of review intervals. For each $t \in T$ the stage t is the review interval between decision epochs t and $t + 1$ referred to as the t-th review interval.

Stav X_t systému v okamihu rozhodovania $t \in T$ je úroveň zásob na sklade v čase $t \in T$, t. j. počet náhradných komponentov na sklade k dispozícii v čase (kontroly) t pred prijatím rozhodnutia o doplňujúcej objednávke. Záporné hodnoty stavu indikujú nedostatok zásob. Takže, ak je $X_t < 0$, potom $|X_t|$ predstavuje veľkosť registrovaného deficitu zásob v čase t. Vzhľadom na limit deficitu K a skladovací limit L je stavový priestor X systému reprezentovaný množinou

$$X = \{-K, -K+1, \ldots, L\}.$$

Riadením a_t je množstvo náhradných komponentov objednaných podľa rozhodnutia vybraného v čase $t \in T$. Veľkosť dodávky musí byť postačujúca na vykrytie registrovanej veľkosti deficitu zistenej v okamihu kontroly (ak deficit existuje) a nesmie spôsobiť prekročenie skladovacieho limitu v úrovni zásob. Množina $A(i)$ prípustných riadení v stave $i \in X$ zohľadňuje tieto požiadavky, čo zodpovedá vzťahu:

The state X_t of the system at decision epoch $t \in T$ is the inventory position at time $t \in T$, i.e. the number of spare components in stock on hand at (review) time t before taking a decision on the replenishment order. Negative values of the state indicate the lack of inventory. Thus, if $X_t < 0$ then $|X_t|$ represents the registered inventory deficit size at time t. Due to the deficit limitation K and the storage limitation L the state space X of the system is represented by the set

$$X = \{-K, -K+1, \ldots, L\}.$$

The action a_t is the amount of spare components ordered according to the decision chosen at time $t \in T$. The delivery size must be sufficient to fill the registered shortage quantity (if any) recognised at the review time and must not cause the inventory position to exceed the storage limitation. Hence, the set $A(i)$ of feasible actions in state $i \in X$ follows these requirements, which corresponds to:

$$A(i) = \begin{cases} \{|i|, |i|+1, \ldots, |i|+L\}, & i \in \{-K, -K+1, \ldots, -1\}, \\ \{0, 1, \ldots, L-i\}, & i \in \{0, 1, \ldots, L\}. \end{cases} \quad (8)$$

Priestor riadení A je zjednotením $A(i)$, $i \in X$, takže

$$A = \{0, 1, \ldots, L+K\}.$$

Sumarizujúc zavedené označenie:

X_t - stav systému v čase $t \in T$, t. j. úroveň zásob v čase $t \in T$,
a_t - riadenie v čase $t \in T$, t. j. veľkosť doplňujúcej objednávky v čase $t \in T$,
Z_t - (náhodná) veľkosť dopytu v t-tom intervale kontroly medzi časmi t a $t+1$, $t \in T$,
K - limit deficitu ($0 \le K < \infty$),
L - skladovací limit ($0 < L < \infty$),
Z - množina hodnôt náhodných veličín Z_t, $Z = \{0, 1, \ldots\}$,

možno špecifikovať prechodovú dynamiku vývoja systému. Systém sa správa v súlade s prechodovou rovnicou:

The action space A is the union of $A(i)$, $i \in X$, therefore

$$A = \{0, 1, \ldots, L+K\}.$$

Summarising the notation introduced:

X_t - the system state at time $t \in T$, i.e. the inventory position at time $t \in T$,
a_t - the action at time $t \in T$, i.e. the size of a replenishment order at time $t \in T$,
Z_t - the (random) demand size in the t-th review interval between times t and $t+1$, $t \in T$,
K - the deficit limitation ($0 \le K < \infty$),
L - the storage limitation ($0 < L < \infty$),
Z - the set of values of random variables Z_t, $Z = \{0, 1, \ldots\}$,

the transition dynamics of the system motion can be specified. The system behaves in compliance with the transition equation:

$$X_{t+1} = \max\{X_t + a_t - Z_t, -K\} = X_t + a_t - \min\{Z_t, X_t + a_t + K\}, \quad t \in T. \quad (9)$$

Pravdepodobnostné zákony vývoja systému sú stanovené (stacionárnymi jednokrokovými) pravdepodobnosťami prechodu:

The probabilistic laws of system motion are stated by (stationary one-step) transition probabilities:

$$p(i,j,a) \equiv p_{i,j}(a) = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i, a_t = a\} = \begin{cases} \sum_{k=i+a+K}^{\infty} q(k) = 1 - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{i+a+K-1} \frac{\lambda^k}{k!}, & j = -K, \\ q(i+a-j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+a-j}}{(i+a-j)!}, & j \in \{-K+1, -K+2, \ldots, i+a\}, \\ 0, & j \in \{i+a+1, i+a+2, \ldots, L\}, \end{cases} \quad (10)$$

$$a \in A(i),\ i \in X = \{-K, -K+1, \ldots, L\},\ t \in T.$$

Činnosť zásobovacieho systému má svoje ekonomické dôsledky. Stacionárna nákladová funkcia $c(i, a)$ vyjadruje náklady vyna-

Operation of the inventory system has its economic consequences. A stationary cost function $c(i, a)$ expresses the cost incurložené počas intervalu kontroly, keď stav systému v okamihu rozhodovania na začiatku intervalu kontroly je i a následné riadenie je a. Dopytovo-zásobovacie náklady $c(i, a)$ pozostávajú zo súčtu funkcie objednávacích nákladov $D(i, a)$, funkcie skladovacích nákladov $S(i, a)$, funkcie nákladov deficitu $N(i, a)$ a funkcie nákladov odmietnutia $B(i, a)$. Zodpovedajúce náhodné veličiny $C_t \equiv c(X_t, a_t)$, $D_t \equiv D(X_t, a_t)$, $S_t \equiv S(X_t, a_t)$, $N_t \equiv N(X_t, a_t)$, $B_t \equiv B(X_t, a_t)$ predstavujú nákladovú štruktúru v t-tom intervale kontroly, $t \in T$. Veličina $c(i, a)$ môže byť náhodnou veličinou, aj keď je špecifikovaný aktuálny stav a následné riadenie. Jednoznačná kvantifikácia ekonomických dôsledkov činnosti systému počas intervalu kontroly je potom daná funkciou strednej hodnoty (dopytovo-zásobovacích) nákladov $\bar{c}(i, a)$:

red during a review interval, when the system state at the decision epoch at the beginning of the review interval is i and the subsequent action is a. The demand-inventory cost $c(i, a)$ consists of the sum of the ordering cost function $D(i, a)$, the holding cost function $S(i, a)$, the shortage cost function $N(i, a)$, and the rejection cost function $B(i, a)$. The corresponding random variables $C_t \equiv c(X_t, a_t)$, $D_t \equiv D(X_t, a_t)$, $S_t \equiv S(X_t, a_t)$, $N_t \equiv N(X_t, a_t)$, $B_t \equiv B(X_t, a_t)$ represent the cost structure in the t-th review interval, $t \in T$. The quantity $c(i, a)$ may be a random variable although the current state and the subsequent action are specified. Unequivocal quantification of the economic consequences of the system operation during a review interval is then given by the expected (demand-inventory) cost function $\bar{c}(i, a)$:

$$\begin{aligned}\bar{c}(i, a) &= E[C_t \mid X_t = i, a_t = a] \equiv E[c(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] = E[D(X_t, a_t) + S(X_t, a_t) + N(X_t, a_t) + B(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] = \\ &= E[D(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] + E[S(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] + E[N(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] + E[B(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] = \\ &= \bar{D}(i, a) + \bar{S}(i, a) + \bar{N}(i, a) + \bar{B}(i, a),\ a \in A(i),\ i \in X,\ t \in T.\end{aligned} \tag{11}$$

Funkcia strednej hodnoty objednávacích alebo dodávacích nákladov $\bar{D}(i, a)$ odráža očakávané náklady spojené s podaním objednávky. Pozostáva z nákupných nákladov a nákladov dodávky s možnosťou množstevnej zľavy.

The expected ordering or delivery cost function $\bar{D}(i, a)$ reflects the expected expenses associated with a placement of an order. It consists of the purchasing cost and the delivery expense with a quantity discount possibility.

$$\bar{D}(i, a) = E[D(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ ca + b, & 0 < a < M, \\ (1 - \beta)ca + b, & a \geq M, \end{cases} \tag{12}$$

$$a \in A(i),\ i \in X,\ t \in T.$$

Cenový koeficient c je nákupná cena za komponent a b sú fixné (nastavovacie) náklady platené za dodávku (ak je nejaká). Ak sa objedná aspoň M náhradných komponentov, uplatní sa množstevná zľava vo forme 100β %-nej cenovej modifikácie, kde $\beta \in \langle 0,1 \rangle$ je diskontný faktor.

The cost coefficient c is a purchasing cost per component and b is a fixed (setup) cost paid for delivery (if any). If at least M spare components are ordered, a quantity discount in the form of 100β % price break is applied, where $\beta \in \langle 0,1 \rangle$ is the discount factor.

Funkcia strednej hodnoty skladovacích alebo uchovávacích nákladov $\bar{S}(i, a)$ vyjadruje očakávané náklady na skladovanie náhradných komponentov v sklade počas intervalu kontroly o dĺžke jednej časovej jednotky. Nech $x(u)$ označuje stav systému, t. j. úroveň zásob, v čase u po aktuálnom okamihu rozhodovania, Y_k predstavuje čas príchodu k-tej dopytovej požiadavky meraný od výberu aktuálneho rozhodnutia a s sú náklady na skladovanie jedného komponentu počas jednotky času. Keďže sa predpokladá okamžitá dodávka, je v každom okamihu rozhodovania $t \in T$ stav zásob na sklade (v čase 0 po prijatí rozhodnutia) $x(0) = X_t + a_t$. Máme:

The expected holding or storage cost function $\bar{S}(i, a)$ expresses the expected expenses for holding spare components in stock during a review interval of a time unit length. Let $x(u)$ denote the state of the system, i.e. the inventory position, at time u after the current decision epoch, Y_k represent the k-th demand requirement arrival time measured since the current decision choice, and s be the cost incurred per component held in stock per unit time. As instantaneous delivery of order is assumed, at any decision epoch $t \in T$ the inventory position (at time 0 after the decision take) is $x(0) = X_t + a_t$. We have:

$$\begin{aligned}\bar{S}(i, a) &= E[S(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] = E\left[s \int_0^1 \max[0, x(u)]du \mid X_t = i, a_t = a \right] = E\left[s \sum_{k=1}^{X_t + a_t} W_k \mid X_t = i, a_t = a \right] = \\ &= E\left[s \sum_{k=1}^{X_t + a_t} \min[1, Y_k] \mid X_t = i, a_t = a \right] = E\left[s \sum_{k=1}^{i+a} \min[1, Y_k] \right] = s \sum_{k=1}^{i+a} E[\min[1, Y_k]],\end{aligned} \tag{13}$$

$$a \in A(i),\ i \in X,\ t \in T.$$

Rovnica (13) vyplýva z toho, že na oblasť, ktorú predstavuje určitý integrál v (13), sa možno dívať ako na riadkovú oblasť miesto tradičnej stĺpcovej reprezentácie, čo vedie k súčtu náhodných veličín $W_k = \min\{1, Y_k\}$ v rovnici (13). Použitá je konvencia, že súčet členov sa rovná nule, ak horná hranica sumačného indexu je menšia než dolná hranica. Aplikáciou vety o úplnej strednej hodnote a využitím (erlangovskej) identity (4) spolu s označením (7) pre pravdepodobnosti dopytu môžeme odvodiť pre funkciu strednej hodnoty skladovacích nákladov $\overline{S}(i, a)$, že:

Equation (13) follows, since the area represented by the definite integral in (13) may by regarded in a row-like way instead of a traditional column-like way, which leads to the sum of random variables $W_k = \min\{1, Y_k\}$ in equation (13). The convention is employed that the sum of terms equals zero if upper limit for summation index is less than lower limit. Applying the law of total expectation and utilising the (Erlangian) identity (4) together with notation (7) for demand probabilities, we can derive for the expected holding cost function $\overline{S}(i, a)$ that:

$$\begin{aligned}\overline{S}(i, a) &= s\sum_{k=1}^{i+a}\int_0^\infty E[\min\{1, Y_k\} \mid Y_k = u]g_k(u)du = s\sum_{k=1}^{i+a}\int_0^\infty \min\{1, u\}g_k(u)du = s\sum_{k=1}^{i+a}\left[\int_0^1 ug_k(u)du + \int_1^\infty g_k(u)du\right] = \\ &= s\sum_{k=1}^{i+a}\left[\frac{k}{\lambda}\int_0^1\frac{(\lambda u)^k}{k!}\lambda e^{-\lambda u}\,du + 1 - \int_0^1\frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda u}\,du\right] = s\sum_{k=1}^{i+a}\left[\frac{k}{\lambda}\left(1 - \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\right] = \\ &= s\sum_{k=1}^{i+a}\left[\frac{k}{\lambda}\left(1 - \sum_{j=0}^{k} q(j)\right) + \sum_{j=0}^{k-1} q(j)\right] = s\sum_{k=1}^{i+a}\left[\frac{k}{\lambda}[1 - q(k)] + \left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)\sum_{j=0}^{k-1} q(j)\right],\end{aligned} \tag{14}$$

$a \in A(i),\ i \in X,\ t \in T.$

Funkcia strednej hodnoty nákladov deficitu alebo nedostatku $\overline{N}(i, a)$ odráža očakávané výdaje vynaložené, keď nastane deficit zásob. Cenový koeficient v sú pokutové náklady na chýbajúci komponent z dôvodu nedostatku zásob. Môžu reprezentovať náklady spojené s prerušením produkcie, ktoré je vyvolané nedostatkom náhradných komponentov. Po zavedení funkcie $O(i, a, k)$ predpisom

The expected shortage or non-availability cost function $\overline{N}(i, a)$ reflects the expected expenses incurred when an inventory deficit occurs. The cost coefficient v is a penalty cost per missing component due to the lack of inventory. It may represent the cost associated with a break of the production forced by the shortage of spare components. Introducing a function $O(i, a, k)$ by:

$$O(i, a, k) = \begin{cases} 0, & k \le i + a, \\ k - (i + a), & i + a + 1 \le k \le i + a + K, \\ K, & k \ge i + a + K + 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$i \in X,\ a \in A(i) \subset A,\ k \in Z,$$

predstavuje náhodná veličina $O_t \equiv O(X_t, a_t, Z_t)$ veľkosť registrovaného deficitu zásob počas etapy $t \in T$, ktorý bol akceptovaný v údržbárskom stredisku medzi okamihmi rozhodovania t a $t + 1$. Potom určíme $\overline{N}(i, a)$ takto:

the random variable $O_t \equiv O(X_t, a_t, Z_t)$ represents the size of the registered inventory deficit during stage $t \in T$, which has been accepted in the maintenance centre between decision epochs t and $t + 1$. Then we specify $\overline{N}(i, a)$ as follows:

$$\overline{N}(i, a) = E[N(X_t, a_t) \mid X_t = i, a_t = a] = E[vO(X_t, a_t, Z_t) \mid X_t = i, a_t = a] =$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{\infty} E[vO(X_t, a_t, Z_t) \mid Z_t = k, X_t = i, a_t = a]P\{Z_t = k \mid X_t = i, a_t = a\} = \sum_{k=0}^{\infty} E[vO(i, a, k)]P\{Z_t = k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} vO(i, a, k)q(k) = v\left[\sum_{k=i+a+1}^{i+a+K}(k - i - a)q(k) + K\sum_{k=i+a+K+1}^{\infty} q(k)\right] = \\ &= v\left[\sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} kq(k) - (i + a)\sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} q(k) + K\left(1 - \sum_{k=0}^{i+a+K} q(k)\right)\right],\end{aligned} \tag{16}$$

$a \in A(i),\ i \in X,\ t \in T.$

Funkcia strednej hodnoty nákladov deficitu $\overline{N}(i, a)$ sa niekedy môže uvažovať v tvare, kde sa používa cenový koeficient y na vyjadrenie nákladov vynaložených za chýbajúci komponent počas jednotky času v situácii vyčerpania zásob. Na odvodenie funkcie strednej hodnoty nákladov deficitu $\overline{N}(i, a)$ pre takúto modifikáciu nákladov deficitu použijeme rovnaké náhodné veličiny $x(u)$ a Y_k ako v prípade funkcie strednej hodnoty skladovacích nákladov. Poznamenávame, že úroveň zásob $x(u)$ v čase u (ktorý sa meria od aktuálneho okamihu rozhodovania $t \in T$, keď $u = 0$) musí spĺňať obmedzenie $-K \leq x(u) \leq L$ pre $u \geq 0$. Potom máme pre $a \in A(i)$, $i \in X$, $t \in T$:

The expected shortage cost function $\overline{N}(i, a)$ can sometimes be considered in the form, where a cost coefficient y is employed to express the cost incurred per unit time per missing component in running-out-of-stock situation. To derive the expected shortage cost function $\overline{N}(i, a)$ for such a modification of deficit expenses, we use the same random variables $x(u)$ and Y_k as in the expected holding cost function case. We remark that the inventory position $x(u)$ at time u (which is measured from the current decision epoch $t \in T$, when $u = 0$) must satisfy the constraint $-K \leq x(u) \leq L$ for $u \geq 0$. Then we have for $a \in A(i)$, $i \in X$, $t \in T$:

$$\begin{aligned}
\overline{N}(i, a) &= E[N(X_t, a_t) \,|\, X_t = i, a_t = a] = E\left[y \int_0^1 - \min[0, x(u)]du \,\Big|\, X_t = i, a_t = a \right] = \\
&= E\left[y \sum_{k=X_t+a_t+1}^{X_t+a_t+K} (1 - \min[1, Y_k]) \,\Big|\, X_t = i, a_t = a \right] = E\left[y \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} (1 - \min[1, Y_k]) \right] = \\
&= y \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} \int_0^{\infty} E[1 - \min[1, Y_k] \,|\, Y_k = u] g_k(u) du = y \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} \int_0^{\infty} [1 - \min[1, u]] g_k(u) du = \\
&= y \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} \left[\int_0^1 g_k(u) du - \int_0^1 u g_k(u) du \right] = y \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} \left[G_k(1) - \frac{k}{\lambda} G_{k+1}(1) \right].
\end{aligned} \tag{17}$$

Po substitúcii príslušných výrazov z (3) za $G_k(1)$ a $G_{k+1}(1)$ v (17) obdržíme:

After substituting the corresponding expressions from (3) for $G_k(1)$ and $G_{k+1}(1)$ in (17) we obtain:

$$\begin{aligned}
\overline{N}(i, a) &= E[N(X_t, a_t) \,|\, X_t = i, a_t = a] = y \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{k-1} q(j) - \frac{k}{\lambda} \left[1 - \sum_{j=0}^{k} q(j) \right] \right\} = \\
&= y \left\{ K + \sum_{k=i+a+1}^{i+a+K} \left[\left(\frac{k}{\lambda} - 1 \right) \sum_{j=0}^{k-1} q(j) - \frac{k}{\lambda}(1 - q(k)) \right] \right\}, \quad a \in A(i), i \in X, t \in T.
\end{aligned} \tag{18}$$

Funkcia strednej hodnoty nákladov odmietnutia alebo vrátenia nazad $\overline{B}(i, a)$ reprezentuje očakávané výdaje týkajúce sa situácií, keď dopytová požiadavka je odmietnutá v dôsledku prekročenia limitu deficitu. Cenový koeficient r sú pokutové náklady za chýbajúci komponent požadovaný v prípade zamietnutia akceptácie dopytu. Môžu zodpovedať nákladom plateným za mimoriadnu dodávku chýbajúceho komponentu (ak prevyšujúci dopyt možno poslať nazad – ako ignorovaný údržbárskym strediskom – len formálne). Zistíme, že:

The expected rejection or back-sending cost function $\overline{B}(i, a)$ represents the expected expenses concerning situations, when a demand requirement is rejected because of a deficit limitation overrun. The cost coefficient r is a penalty cost incurred per missing component required in the case of the demand acceptance disapproval. It can correspond with the cost paid for an extraordinary delivery of a missing component (if demand in excess may be sent back – as ignored by the maintenance centre – only formally). We find:

$$\begin{aligned}
\overline{B}(i, a) &= E[B(X_t, a_t) \,|\, X_t = i, a_t = a] = E[r \max[0, Z_t - (X_t + a_t + K)] \,|\, X_t = i, a_t = a] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[r \max[0, Z_t - X_t - a_t - K] \,|\, Z_t = k, X_t = i, a_t = a] P[Z_t = k \,|\, X_t = i, a_t = a] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[r \max[0, k - i - a - K]] P[Z_t = k] = r \left\{ \sum_{k=i+a+K+1}^{\infty} k q(k) - (i + a + K) \left[1 - \sum_{k=0}^{i+a+K} q(k) \right] \right\} = \\
&= r \left\{ \lambda + (i + a + K - \lambda) \sum_{k=0}^{i+a+K-1} q(k) - (i + a + K)[1 - q(i + a + K)] \right\}, \quad a \in A(i), i \in X, t \in T.
\end{aligned} \tag{19}$$

Riadený náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ s pravdepodobnosťami prechodu (10) je Markovov rozhodovací proces s diskrétnym časom spĺňajúci formuláciu markovovskej vlastnosti:

The controlled stochastic process $\{X_t, t \in T\}$ with transition probabilities (10) is a discrete-time Markov decision process satisfying the Markovian property formulation:

$$\begin{gathered}
P[X_{t+1} = j \,|\, X_t = i, a_t = u, X_{t-1} = i_{t-1}, a_{t-1} = u_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0, a_0 = u_0] = P[X_{t+1} = j \,|\, X_t = i, a_t = u], \\
\forall\ t \in T,\ \forall\ j, i, i_{t-1}, \ldots, i_1, i_0 \in X,\ \forall\ u, u_{t-1}, \ldots, u_1, u_0 \in A.
\end{gathered} \tag{20}$$

Predpis na výber riadenia v každom stave v nejakom okamihu rozhodovania je riadiace pravidlo. Nech d_t označuje riadiace pravidlo na prijímanie riadení v okamihu rozhodovania $t \in T$. Postupnosť $\delta = \{d_t\}_{t \in T}$ tvorí stratégiu (t. j. stratégiu riadenia). Stratégia je eventualitný plán, ktorý predpisuje príslušné riadenie pre každý stav systému v ľubovoľnom okamihu rozhodovania počas plánovacieho horizontu. Stratégia δ zložená z rozhodovacích funkcií $d_t : X \rightarrow A$, $t \in T$, sa nazýva Markovova stratégia.

Vzhľadom na markovovskú vlastnosť (20) a stacionárny charakter správania systému je opodstatnené použiť v uvažovanom zásobovacom systéme s periodickou kontrolou stacionárnu Markovovu stratégiu riadenia

A prescription for selecting an action in each state at some decision epoch is the control rule. Let d_t denote a control rule for taking actions at decision epoch $t \in T$. The sequence $\delta = \{d_t\}_{t \in T}$ constitutes a policy (i.e. a control policy). The policy is a contingency plan prescribing an appropriate action for each system state at any decision epoch over the planning horizon. The policy δ consisted of decision functions $d_t : X \rightarrow A$, $t \in T$, is referred to as a Markov policy.

Due to the Markovian property (20) and the stationary nature of the system behaviour a stationary Markov policy

$$\delta = \{d_t\}_{t=0}^{\infty}, \quad d_t = d, \quad \forall \quad t \in T = \{0, 1, \ldots\}, \quad d : X \rightarrow A, \tag{21}$$

pre sekvenčné rozhodovanie o doplňujúcich objednávkach počas nekonečného plánovacieho horizontu. Na označenie stacionárnej Markovovej stratégie sa často používa symbol d miesto δ.

Ekonomické dôsledky uplatnenia stratégie vyjadruje kritérium optimality v tvare strednej hodnoty priemerných nákladov za jednotku času pri dlhodobom pôsobení systému. Hodnota kritéria je pre počiatočný stav $i \in X$ a stacionárnu Markovovu stratégiu d daná rovnicou:

is justified to be applied for sequential decision making on replenishment orders over the infinite planning horizon in the periodic-review inventory system under consideration. The symbol d is often used to denote the stationary Markov policy instead of δ.

Economic consequences of the policy application are expressed by the criterion of interest in the form of the long-run expected average cost per unit time. The criterion value is stated for an initial state $i \in X$ and a stationary Markov policy d by the equation:

$$A^d(i) = \lim_{n \to \infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, a_t) \,\middle|\, X_0 = i, d\right], i \in X, \quad a_t = d(X_t), t \in T. \tag{22}$$

Hodnotu veličiny $A^d(i)$ zodpovedajúcu stratégii d možno získať z (22) takto:

The value of the quantity $A^d(i)$ corresponding to the policy d can be obtained from (22) as follows:

$$\begin{aligned} A^d(i) &= \lim_{n \to \infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} c(X_t, a_t) \,\middle|\, X_0 = i, d\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} E[c(X_t, a_t) \mid X_0 = i, d] = \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\sum_{j \in X} E[c(X_t, a_t) \mid X_t = j, X_0 = i, d] P[X_t = j \mid X_0 = i, d]\right\} = \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{j \in X}\left\{\sum_{t=0}^{n-1} E[c(X_t, a_t) \mid X_t = j, a_t = d(j)] P[X_t = j \mid X_0 = i, d]\right\} = \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{j \in X}\left\{\sum_{t=0}^{n-1} \bar{c}(j, d(j)) p_{i,j}^{(t)}(d)\right\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in X}\left\{\bar{c}(j, d(j)) \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} p_{i,j}^{(t)}(d)\right\} = \\ &= \sum_{j \in X}\left\{\bar{c}(j, d(j)) \lim_{n \to \infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} p_{i,j}^{(t)}(d)\right]\right\} = \sum_{j \in X} \bar{c}(j, d(j)) \pi_i^d(j) \equiv g_i^d, \; i \in X, \end{aligned} \tag{23}$$

kde limitné pravdepodobnosti:

where the limiting probabilities:

$$\pi_i^d(j) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} P[X_t = j \mid X_0 = i, d] \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} p_{i,j}^{(t)}(d), \; i, j \in X, \tag{24}$$

sú limitami t-krokových pravdepodobností prechodu $p_{i,j}^{(t)}(d) \equiv$ $\equiv P[X_t = j \mid X_0 = i, d]$ v zmysle Cesara, keď t konverguje do nekonečna a používa sa stacionárna Markovova stratégia d. Ak existujú obyčajné limity $\lim_{t \to \infty} p_{i,j}^{(t)}(d)$, potom sa limity v zmysle Cesara s nimi zhodujú.

Limitné pravdepodobnosti nezávisia od počiatočného stavu v prípade, že Markovov reťazec indukovaný stratégiou d nemá viac než jednu uzavretú triedu stavov, z ktorej nie je možný žiadny únik

are the Cesaro limits of t-step transition probabilities $p_{i,j}^{(t)}(d) \equiv$ $\equiv P[X_t = j \mid X_0 = i, d]$, when t approaches infinity and a stationary Markov policy d is employed. If the ordinary limits $\lim_{t \to \infty} p_{i,j}^{(t)}(d)$ exist, then the Cesaro limits coincide with them.

Limiting probabilities are independent of the initial state in case the Markov chain induced by the policy d has no more than one closed class of states, from which no escape is possible. Then von. Potom $\pi_i^d(j) = \pi^d(j)$ pre všetky $i, j \in X$, kde $\pi^d(j) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} p_{i,j}^{(t)}(d)$ je limita t-krokových pravdepodobností prechodu do stavu $j \in X$ v zmysle Cesara (bez závislosti od počiatočného stavu i). Okamžitý dôsledok je, že kriteriálna hodnota $A^d(i)$ je rovnaká pre všetky počiatočné stavy $i \in X$, ak stratégia d indukuje Markovov reťazec, ktorý nemá žiadne dve disjunktné uzavreté triedy stavov. Stratégia d je potom charakterizovaná tým, že:

$$A^d(i) = \sum_{j \in X} \bar{c}(j, d(j))\pi^d(j) \equiv g^d, \ \forall \ i \in X. \tag{25}$$

Nech

$$A^*(i) = \min_d A^d(i), i \in X. \tag{26}$$

Stacionárna Markova stratégia d^* sa nazýva optimálna, ak

$$A^{d^*}(i) = A^*(i), \ \forall \ i \in X. \tag{27}$$

Na určenie optimálnych stacionárnych Markovových stratégií poskytuje teória Markovových rozhodovacích procesov efektívne prostriedky [1], [2], akými sú metóda iterácie podľa stratégie, metóda iterácie podľa hodnoty, či formulácie prostredníctvom lineárneho programovania.

Optimálna stratégia d^* je optimálnou stratégiou riadenia zásob. Predpisuje najvhodnejšiu veľkosť doplňujúcej objednávky pre každú možnú aktuálnu úroveň zásob, ktorá sa zistí v ľubovoľnom okamihu rozhodovania. Aplikácia stratégie d^* počas nekonečného plánovacieho horizontu vedie k vynaloženiu minimálnej strednej hodnoty dlhodobých priemerných nákladov za jednotku času. Tým sú odhalené riadiace pravidlá pre ekonomicky efektívne dynamické riadenie operácií v podmienkach rizika v zásovobacom systéme s periodickou kontrolou.

Prístup založený na Markovových rozhodovacích modeloch možno použiť na riešenie optimalizačných problémov v riadení zásob s periodickou kontrolou vždy, keď je splnená markovovská vlastnosť. Ak sa proces dopytu líši od Poissonovho vstupného prúdu, avšak množstvá dopytu v intervaloch kontroly nasledujúcich po sebe sú navzájom nezávislé náhodné veličiny, je riadený vývoj zásobovacieho systému reprezentovaný Markovovým rozhodovacím procesom s diskrétnym časom. V [3] možno nájsť Markovove rozhodovacie modely riadenia zásob s diskrétnym časom a nekonečným horizontom pre tri varianty jednopoložkového zásobovacieho systému s periodickou kontrolou, kde veľkosti dopytu v intervaloch kontroly sú nezávislé a rovnako rozložené diskrétne náhodné veličiny s konečnou množinou ich možných hodnôt.

4. Dodatok: Regeneratívna vlastnosť Poissonovho procesu

Poissonov proces je proces obnovy $\{N(t), t \geq 0\}$, kde doby V_k, $k = 1, 2, \ldots$, medzi po sebe nasledujúcimi výskytmi obnov sú nezávislé a rovnako rozložené exponenciálne náhodné veličiny. Počet $N(t)$ obnov do času t je náhodná veličina s Poissonovou pravdepodobnostnou funkciou:

$\pi_i^d(j) = \pi^d(j)$ for all $i, j \in X$, where $\pi^d(j) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} p_{i,j}^{(t)}(d)$ is the Cesaro limit of t-step transition probabilities into the state $j \in X$ (without dependence on the initial state i). The immediate consequence is that the criterion value $A^d(i)$ is the same for all initial states $i \in X$, if the policy d induces a Markov chain with no two disjoint closed classes of states. The policy d is then characterised by:

$$A^d(i) = \sum_{j \in X} \bar{c}(j, d(j))\pi^d(j) \equiv g^d, \ \forall \ i \in X. \tag{25}$$

Let

$$A^*(i) = \min_d A^d(i), i \in X. \tag{26}$$

A stationary Markov policy d^* is said to be optimal if

$$A^{d^*}(i) = A^*(i), \ \forall \ i \in X. \tag{27}$$

Efficient methods as policy iteration, value iteration or linear programming formulations are available [1], [2] in the theory of Markov decision processes to determine optimal stationary Markov policies.

Optimal policy d^* is the optimal inventory control policy. It prescribes the most appropriate value of the replenishment order size for each possible current inventory position that can be recognised at any decision epoch. The application of the policy d^* over the infinite planning horizon results in incurring the minimal long-run expected average cost per unit time. Hence, the control rules for the cost-effective dynamic operations management under risk in the periodic-review inventory system are revealed.

The approach based on the Markov decision modelling can be employed to solve optimisation problems in periodic-review inventory control whenever the Markovian property is satisfied. If the demand process differs from a Poisson arrival stream, but the demand quantities in consecutive review intervals are mutually independent random variables, a discrete-time Markov decision process represents the controlled evolution of the inventory system. The infinite horizon discrete-time Markov decision models of inventory control can be found in [3] for three variants of a single-item periodic-review inventory system, where demand sizes in review intervals are independent and identically distributed discrete random variables with a finite set of their possible values.

4. Appendix: The regenerative property of a Poisson process

The Poisson process is a renewal process $\{N(t), t \geq 0\}$, where the interoccurrence times V_k, $k = 1, 2, \ldots$, between consecutive renewals are independent and identically distributed exponential random variables. The number $N(t)$ of renewals up to time t is a random variable with the Poisson probability mass function:

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots, t \geq 0. \qquad \text{(A0)}$$

Ak s a u sú ľubovoľné nezáporné reálne čísla, potom aplikácia vety o úplnej pravdepodobnosti na počet $N(s + u)$ obnov od času 0 do času $s + u$ dáva:

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots, t \geq 0. \qquad \text{(A0)}$$

If s and u are arbitrary non-negative real numbers, then an application of the law of total probability for the number $N(s + u)$ of renewals from time 0 to time $s + u$ yields:

$$\begin{aligned} P\{N(s+u) = n\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(s+u) = n \mid N(s) = k\} P\{N(s) = k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} P\{N(s+u) = n \mid N(s) = k\}\, e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!},\ s, u \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad \text{(A1)}$$

Na druhej strane, ak použijeme binomickú vetu na vyjadrenie n-tej mocniny súčtu $s + u$ vo vzorci pre pravdepodobnosť $P\{N(s + u) = n\}$ podľa pravdepodobnostnej funkcie (A0), dostaneme:

On the other hand, if we use the binomial theorem to express the n-th power of the sum $s + u$ in the formula for the probability $P\{N(s + u) = n\}$ according to the probability mass function (A0), we get:

$$\begin{aligned} P\{N(s+u) = n\} &= e^{-\lambda(s+u)}\frac{[\lambda(s+u)]^n}{n!} = e^{-\lambda(s+u)}\frac{\lambda^n}{n!}(s+u)^n = e^{-\lambda(s+u)}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s^k u^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda s}e^{-\lambda u}\frac{\lambda^{n-k}\lambda^k}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}s^k u^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!},\quad s, u \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad \text{(A2)}$$

Porovnaním (A1) s (A2) a použitím (A0) vidíme, že pre Poissonov proces platí nasledujúca rovnica:

Comparing (A1) with (A2) and using (A0) we see that the following equation holds for the Poisson process:

$$P\{N(s+u) = n \mid N(s) = k\} = e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{n-k}}{(n-k)!} = P\{N(u) = n - k\},\ s, u \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots, n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(A3)}$$

Rovnica (A3) odráža na histórii nezávislý vývoj Poissonovho procesu.

Equation (A3) reflects the history independent evolution of the Poisson process.

Na zistenie rozdelenia pravdepodobnosti pre počet obnov od času $s \geq 0$ do času $t \geq s$ možno použiť vetu o úplnej pravdepodobnosti na pravdepodobnosť $P\{N(t) - N(s) = i\}$. Potom máme:

To find the probability distribution for the number of renewals from time $s \geq 0$ to time $t \geq s$, the law of total probability can be employed for the probability $P\{N(t) - N(s) = i\}$. Then we have:

$$\begin{aligned} P\{N(t) - N(s) = i\} &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{N(t) - N(s) = i \mid N(s) = j\}P\{N(s) = j\} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{P\{N(t) - N(s) = i, N(s) = j\}}{P\{N(s) = j\}}P\{N(s) = j\} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{P\{N(t) = j + i, N(s) = j\}}{P\{N(s) = j\}}P\{N(s) = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{N(t) = j + i \mid N(s) = j\}P\{N(s) = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{N(t-s) = i\}P\{N(s) = j\} = \\ &= P\{N(t-s) = i\}\sum_{j=0}^{\infty} P\{N(s) = j\} = P\{N(t-s) = i\},\ t \geq s \geq 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad \text{(A4)}$$

Rovnica (A3) bola použitá v (A4) pre zápis rovnosti $P\{N(t) = j + i \mid N(s) = j\} = P\{N(t - s) = i\}$. Rovnica (A4) deklaruje stacionárnosť (t. j. časovú homogénnosť) Poissonovho procesu.

Vzťah medzi predošlou históriou Poissonovho procesu a jej pokračovaním je pre časy $t \geq s \geq 0$ daný nasledujúcou rovnicou:

Equation (A3) has been used in (A4) to write the equality $P\{N(t) = j + i \mid N(s) = j\} = P\{N(t - s) = i\}$. Equation (A4) declares the stationarity (i.e. the time homogeneity) of the Poisson process.

The relationship between a previous history of the Poisson process and its continuation is given for times $t \geq s \geq 0$ by the following equation:

$$\begin{aligned} P\{N(t) - N(s) = i \mid N(s) = j\} &= \frac{P\{N(t) - N(s) = i, N(s) = j\}}{P\{N(s) = j\}} = \frac{P\{N(t) = j + i, N(s) = j\}}{P\{N(s) = j\}} = P\{N(t) = j + i \mid N(s) = j\} = \\ &= P\{N(t-s) = i\} = P\{N(t) - N(s) = i\},\ t \geq s \geq 0,\ i, j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad \text{(A5)}$$

Posledná rovnosť v (A5) vyplýva z (A4) a predposledná rovnosť z (A3). Rovnica (A5) ako priamy dôsledok rovnice (A3) ukazuje, že Poissonov proces má nezávislé prírastky.

The last equality in (A5) follows from (A4) and the next to last equality from (A3). Equation (A5) as a straightforward con-

Rovnice (A4) a (A5)/(A3) potvrdzujú, že vývoj Poissonovho procesu po ľubovoľnom nezápornom reálnom časovom okamihu *s* je pravdepodobnostnou kópiou vývoja procesu od času 0 bez akejkoľvek závislosti od histórie procesu do času *s*. Poissonov proces sa teda regeneruje v ľubovoľnom bode času.

Poďakovanie

Táto práca bola podporovaná Vedeckou grantovou agentúrou Ministerstva školstva Slovenskej republiky a Slovenskej akadémie vied grantom číslo 1/7211/20.

sequence of equation (A3) shows that the Poisson process has independent increments.

Equations (A4) and (A5)/(A3) confirm that the evolution of the Poisson process after an arbitrary non-negative real time epoch *s* is a probabilistic replica of the process evolution since time 0 without any dependence on the process history till time *s*. Hence, the Poisson process regenerates itself at any point of time.

Acknowledgement

This work was supported by Scientific Grant Agency of Ministry of Education of Slovak Republic and Slovak Academy of Sciences under grant No. 1/7211/20.

Literatúra - References

[1] TIJMS, H. C.: *Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach.* Wiley, Chichester, 1986
[2] PUTERMAN, M. L.: *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming.* Wiley, New York, 1994
[3] BARTL, O.: Inventory control Markov decision models. In: *Second Scientific Conference "Effective Transport, the Way to European Union" - Section 1 & 2.* University of Pardubice, Pardubice, 1999, pp. 371-376