

Július Rebo *

DISKRÉTNY PROCES ZHROMAŽĎOVANIA S DVOMA TRIEDAMI PRIORÍT

THE DISCRETE PROCESS OF STORAGE WITH TWO PRIORITY CLASSES

Príspevok je venovaný špecifickému modelu diskretného procesu zhromažďovania elementov s dvoma triedami priorít. Každá trieda priorít je tvorená nezávislým vstupným tokom elementov s Poissonovým rozdelením. Odvođené sú niektoré potrebné základné charakteristické hodnoty a metóda pridelenia optimálnych výstupných kapacít jednotlivým triedam priority a taktiež metóda optimalizácie dĺžky periódy minimalizujúca prevádzkové náklady systému.

1 Úvod

Nasledujúci model diskretného procesu zhromažďovania elementov s prioritami je zovšeobecnením modelu zhromažďovania s deterministickým časom obsluhy $T > 0$ a Poissonovým vstupným tokom elementov s intenzitou $\lambda > 0$. Kapacitu zhromažďovacieho priestoru stotožníme s nekonečnou dĺžkou čakacej fronty a budeme predpokladať, že akumulácia elementov končí v každom okamžiku t_i , pričom $T = t_i - t_{i-1}$, $\forall i$. Bezprostredne po okamžiku t_i je obslužený buď celý front, keď jeho dĺžka je menšia ako M , alebo skupina obsahujúca M elementov. Zvyšok elementov, ktoré neboli obslužené, čaká na ďalšiu obsluhu v nasledujúcom okamžiku t_{i+1} . Predpísanú dĺžku intervalu $T = t_i - t_{i-1}$ nazývame *periódou zhromažďovania* a jej dĺžka určuje trvanie akumulácie elementov, kladnú celočíselnú hodnotu M nazývame *maximálna výstupná kapacita*. Predpokladáme, že vstupný tok elementov má

Poissonove rozdelenie s pravdepodobnosťami $\pi_r = \frac{(\lambda T)^r}{r!} e^{-\lambda T}$,

že počas jednej periódy T vstúpi práve r elementov, so strednou hodnotou $\lambda T > 0$. Pomer strednej hodnoty a maximálnej výstupnej kapacity M budeme nazývať zaťaženie systému ρ , pre ktoré musí platiť

$$\rho = \frac{\lambda T}{M} < 1. \quad (1.1.)$$

Množstvo zhromaždených elementov na konci n -tej periódy označujeme S_n a nazývame *stavom na konci periódy*. Hodnota stavu záfaze na konci periódy závisí od počtu elementov X_T , ktoré vstúpili do systému počas trvania periódy a na zvyšku elementov Z_{n-1} z predchádzajúcej periódy. Náhodnú premennú Z môžeme vyjadriť ako hodnotu $Z_n = S_n - M$, ak množstvo zhromaždených elemen-

This paper is devoted to a specific model of the discrete process of storage with two priority classes. Every priority class of the elements is formed by independent Poisson distributed incoming streams of the elements. There are derived some basic characteristic values, a method of assignment optimal out-going capacities for the classes of priority and a costs minimising method for the length of the storage period as well.

1 Introduction

The following discrete process of priority storage is a generalisation of the storage process with a determining time of service $T > 0$ and the incoming stream of elements following the Poisson distribution with rate $\lambda > 0$. Capacity of a storage area will be identical with the infinite length of waiting line and we shall assume that the accumulation of the elements ends in each moment of time t_i , so that $T = t_i - t_{i-1}$, $\forall i$. Either the group containing M elements or all waiting line, when its length is below M , is served immediately after the moment t_i . The rest of the elements which have not been served waits for their service at the next moment t_{i+1} . Exactly prescribed time T is called a *storage period* and its length defines a duration of the accumulation. The positive integer M is usually called a *maximum out-going capacity*. We assume that the incoming stream of elements follows the Poisson distribution, so the probability to enter exactly r elements during

storage period T has a form $\pi_r = \frac{(\lambda T)^r}{r!} e^{-\lambda T}$ with a mean value

$\lambda T > 0$ during period T . The ratio of the mean-value λT elements during a storage period and maximum out-going capacity M will be called *utilisation factor* ρ and it will satisfy

$$\rho = \frac{\lambda T}{M} < 1. \quad (1.1.)$$

We denote S_n the amount of accumulated elements at the moment when the n th period T ends, and it is called *the state at the end of the period*. Value of the state at the end of the period depends on the number of entered elements X_T during period T and on the rest of elements Z_{n-1} from the last period. We can express the stochastic variable Z by the form $Z_n = S_n - M$, if the

* RNDr. Július Rebo

Department of Mathematical Methods, Faculty of Management Science and Informatics, University of Žilina, DP FRI Prievidza, Bakalárska 2, 971 01 Prievidza, Slovak Republic, Tel.: ++421-862-542 30 56, E-mail: rebo@utcpd.sk

tov počas prebiehajúcej periódy je aspoň M , alebo ako hodnotu 0, ak zhromaždených elementov je menej ako M . Stav S_n na konci periódy môžeme tak vyjadriť v nasledujúcom tvare

$$S_n = Z_{n-1} + X_T, \quad (1.2.)$$

kde výraz $Z_{n-1} = \max\{S_{n-1} - M, 0\}$ stručne vyjadruje zvyšok elementov z predchádzajúcej periódy.

Za podmienky (1.1.) množstvo záťaže na konci periódy S_n vytvára Markovov reťazec majúci stacionárne rozdelenie pravdepodobností stavov, pri ktorom stavy nezávisia od počtu periód a môžeme index periódy vynechať. Ak pravdepodobnosť, že stav na konci periódy je $S = k$ označíme $p_k = P(S = k)$ a pravdepodobnosti, že počas periódy vstúpi práve k elementov ako $\pi_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$, môžeme pravdepodobnosti stavov na konci periódy vyjadriť nekonečnou sústavou rovníc

$$p_0 = (p_0 + p_1 + \dots + p_M)\pi_0$$

$$p_k = (p_0 + p_1 + \dots + p_M)\pi_k + p_{M+1}\pi_{k-1} + \dots + p_{M+k}\pi_0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1.3.)$$

Základné riešenie sústavy (1.3.) predchádzajúceho modelu procesu zhromažďovania pomocou vytvárajúcich funkcií je popísané v [1] a podrobne ho dopĺňajú výsledky z [2]. Strednú hodnotu stavu na konci periódy zvyčajne odvodíme zo zodpovedajúcej vytvárajúcej funkcie vypočítaním jej prvej derivácie v bode $z = 1$. Tak dostaneme

$$E(S) = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{\sum_{r=0}^{M-1} (z^M - z^r)p_r}{z^M e^{\rho M(1-z)} - 1} \right] \right|_{z=1} = \frac{M - (M - \lambda T)^2}{2(M - \lambda T)} + \sum_{k=0}^{M-1} (1 - z_k)^{-1}, \quad (1.4a.)$$

kde z_k sú korene charakteristickej rovnice $z^M - e^{-\rho M(1-z)} = 0$ pre $M \geq 2$ a metóda ich výpočtu s ich vlastnosťami je opísaná v [2]. Špeciálne pre $M = 1$ dostaneme

$$E(S) = \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.4b.)$$

Strednú hodnotu zvyšku elementov na konci periódy vyjadríme pomocou (1.2.), pri zanedbaní indexu periódy, v tvare

$$E(Z) = E(S) - \lambda T. \quad (1.5.)$$

V ďalšej časti príspevku sa budeme zaoberať systémom zhromažďovania s elementmi rozdelenými do tried s prioritami obsluhy.

2 Model zhromažďovania s prioritami

2.1 Popis modelu a jeho riešenie

Predpokladajme, že máme daný diskretný proces zhromažďovania s predpísanou dĺžkou periódy T . Nech do systému vstupujú

amount of accumulated elements during previous period is at least as big as M , or by value 0, if the amount is below M . States S_n at the end of periods can be described in the following form

$$S_n = Z_{n-1} + X_T, \quad (1.2.)$$

where the term $Z_{n-1} = \max\{S_{n-1} - M, 0\}$ briefly expresses the rest of elements from the last period.

Under the condition (1.1.) the amount of the elements at the end of period S_n forms a random variable of the Markov chain having steady-state probabilities of states whereas those probabilities are not dependent on the number of period and we can leave out the index of period. If probabilities to have a state $S = k$ elements at the end of the period are denoted as $p_k = P(S = k)$ and probabilities to have k incoming elements as $\pi_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$, then we can express the probabilities at the end of period by infinite system of equations

The basic solution of the system (1.3.) using generating functions is characterised in [1] and those results are completed in detail from [2]. We can derive the mean-value of the state at the end of period by a usual method of computing the first derivative of the corresponding generating function at point $z = 1$. So, we get

where z_k are roots of the characteristic equation $z^M - e^{-\rho M(1-z)} = 0$ for $M \geq 2$ and their computing method with characteristics is completely described in [2]. For $M = 1$ we have a special form

$$E(S) = \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.4b.)$$

The mean-value of the rest of elements at the end of period is expressed with a help of (1.2.), leaving out indexes of periods, as

$$E(Z) = E(S) - \lambda T. \quad (1.5.)$$

In the next part of this paper we shall be interested in the storage system with the elements divided into the classes of service priority.

2 Priority model of storage

2.1 Description of model and its solving method

Let us assume now that we have a defined discrete process of storage with prescribed length of period T . Let the elements of

elementy rozdelené do rôznych tried, napr. podľa dodávateľa. Pre jednoduchosť budeme predpokladať len dva nezávislé vstupné toky s Poissonovým rozdelením s intenzitami $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Akumulácia všetkých elementov prebieha v spoločnom zhromažďovacom priestore. Obsluha sa vykonáva bezprostredne po ukončení periódy jedným spoločným obslužným zariadením s celkovou maximálnou výstupnou kapacitou M elementov súčasne. Akumuláciu a vlastnú obsluhu elementov môžeme vykonávať dvoma nasledujúcimi spôsobmi:

1. Každá trieda elementov disponuje vlastnou kapacitou obsluhy vyhradenou z celkovej maximálnej kapacity M , t. j. elementy 1. triedy majú vyhradenú maximálnu výstupnú kapacitu M_1 , elementy 2. triedy majú vyhradenú kapacitu M_2 , pričom $M_1 + M_2 = M$. Obsluha zhromaždených elementov sa vykonáva tak, že elementy každej triedy sú obsluhované samostatne takým spôsobom, že ak ich je menej ako M_i , obslúžia sa všetky elementy. Ak ich je zhromaždených viac než M_i , obslúži sa plná kapacita každej triedy M_i a zvyšok čaká na ďalšiu obsluhu v nasledujúcej perióde. Pre tento model obsluhy bola riešená úloha nákladovej optimalizácie dĺžky periódy v [3].
2. Druhá možnosť je definovaná nasledovne: Nazvime každú triedu elementov ako triedu priority a ich obsluhu budeme organizovať podľa triedy priority. Je obvyklé, že nižšie číslo udáva vyššiu triedu priority a vyššie číslo nižšiu triedu. Označené elementy prvej triedy budú mať teda vyššiu prioritu ako elementy druhej triedy a budú sa obsluhovať prednostne. Vstupujúce elementy do systému sa zoradujú podľa tried priority do frontu. Zo zhromaždených elementov najskôr obslúžime elementy prvej triedy (vyššej priority). Podľa ich množstva je buď M elementov obslúžených, ak ich je viac než M a zvyšok (spolu s elementmi druhej triedy) čaká na obsluhu v nasledujúcej perióde, alebo sú obslúžené všetky, ak ich je menej ako M a zvyšok z celkovej výstupnej kapacity M_2 je doplnený elementmi 2. triedy nasledovne: Ak zhromaždených elementov 2. triedy je menej ako zostatok z celkovej kapacity M_2 obsadenej elementmi prvej triedy, sú obslúžené všetky, inak zvyšok čaká na ďalšiu obsluhu v nasledujúcej perióde.

V nasledujúcich častiach sa budeme podrobne zaoberať druhou možnosťou.

Dôležitou zmenou v druhom prípade je dopĺňanie voľnej kapacity elementami druhej triedy. Deficitom D výstupnej kapacity nazveme rozdiel celkovej výstupnej kapacity M a aktuálneho počtu obslúžených elementov prvej triedy ($ANSE1$) v príslušnej perióde, t. j. $D = M - ANSE1$. Pretože uvažujeme systém zhromažďovania s nekonečným zhromažďovacím priestorom v stabilizovanom režime, je zrejme, že pre strednú hodnotu obslúžených elementov prvej triedy $E(ANSE1)$ a strednú hodnotu elementov prvej triedy, ktoré počas periódy T do systému vstúpili $E(X_T)$, platí $E(ANSE1) = E(X_T) = \lambda_1 T$. Strednú hodnotu deficitu môžeme potom definovať ako

$$E(D) = E(M - ANSE1) = M - E(ANSE1) = M - E(X_T) = M - \lambda_1 T. \quad (2.1.)$$

Maximálna výstupná kapacita M_2 pre elementy druhej triedy nemôže byť zrejme väčšia ako stanovená stredná hodnota deficitu

different classes enter the system e.g. according to a supplier. To make it simple, we shall discuss only two independent incoming streams with rates $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ following the Poisson distribution. The accumulation of all elements performs at a common storage area. One common machine provides their service with a maximum outgoing capacity M at the same time, immediately when a period of storage is finished. We can organise their own accumulation and service in the following two ways:

1. Each class of elements disposes of a reserved self-capacity of the service from the total maximum out-going capacity M (i.e. the elements of the first class have a reserved maximum out-going capacity M_1 , the elements of the second class have the maximum out-going capacity M_2 where $M_1 + M_2 = M$). The service of accumulated elements is accomplished by serving the elements of each class separately as if there are fewer of them than M_i , all of the elements are served. If there are accumulated more of them than M_i they are served to a full capacity M_i of each class and the rest waits for its service in the next period. For this model of service has been considered a cost method optimising length of period in [3].
2. The second case is defined as: Denote each class of elements as a class of priority and we shall organise their service according to their priority classes. It is usual that the smaller number denotes a higher class of priority and a higher number denotes a lower class of priority. The marked elements of the first class will have a higher priority than the elements of the second class and they will be preferred. Incoming elements are ordered to the waiting lines with respect to their priority class. Within the accumulated elements first are served the elements of the first class (higher priority). According to their amount either M of accumulated elements are served, if there are more elements than M and the rest of them (together with elements of the 2nd priority class) waits for the next service or if there are fewer of them than M , they are served all and the rest of out-going capacity M_2 is completed with elements of the second class as follows: If the amount of the elements of the second class is smaller than the remaining capacity M_2 filled with the first class elements, they are served all, otherwise the rest of them waits for the service in the next period.

We shall be interested in detail in the second case in the following chapters.

An important change in the second case is filling up of the idle capacity with the elements of the second class. We shall call a difference between the out-going capacity M and the actual number of served elements of the first class ($ANSE1$) in a corresponding period as a deficit $D = M - ANSE1$. Since we reason a steady-state infinite storage area system, it is clear that the mean-value of the served elements of the first class $E(ANSE1)$ and a mean-value of the entered elements $E(X_T)$ the system of the same class during the period T will hold $E(ANSE1) = E(X_T) = \lambda_1 T$. We shall define the mean-value of the deficit as

Maximal out-going capacity M_2 for the elements of the second class cannot probably be higher than the mean-value of the deficit

$E(D) = M - \lambda_1 T$ a tak položíme $M_2 \leq [M - \lambda_1 T]$, kde $[x]$ označuje celú časť čísla x , najväčšie celé číslo $\leq x$. Pre elementy prvej triedy priority je teda vyhradená kapacita $M_1 = M - M_2$. Teda, obe výstupné kapacity M_1, M_2 sú diskkrétne závislé od dĺžky zhromažďovacej periódy.

Predstavme si teraz, že náš systém zhromažďovania sa skladá z dvoch rôznych častí (dvoch fiktívnych podsystémov), keď zhromaždené elementy sú obsluhované v tom istom okamžiku bezprostredne po ukončení periódy zhromažďovania spoločným zariadením s celkovou kapacitou M . Prvá časť disponuje výstupnou kapacitou M_1 a druhá kapacitou M_2 pri danej perióde T . Do každého podsystému za jednu periódu vstupuje nezávislý Poissonov tok elementov so strednou hodnotou počtu elementov $\lambda_1 T >$

$> 0, \lambda_2 T > 0$, pozri Obr. 1. Predchádzajúce prispôbenie vlastných výstupných kapacít pre triedy priorit dáva prijateľnú aproximáciu systému s triedami priorit a umožňuje nám využiť metódu riešenia z [3].

Podmienka stability takéhoto systému je daná požiadavkou, aby pre elementy každej triedy priority, ktoré počas jednej periódy vstúpia do systému, platila ekvivalentná podmienka (1.1.). Tak dostaneme $\lambda_i T < M_i, i = 1, 2$. Koeficient zaťaženia $\rho^{[i]}$ pre každý fiktívny podsystém triedy priority je daný nasledujúcim tvarom

$$\rho^{[1]} = \frac{\lambda_1 T}{M_1} = \frac{\lambda_2 T}{M - M_2} \text{ a } \rho^{[2]} = \frac{\lambda_2 T}{M_2}. \quad (2.2.)$$

Stavy jednotlivých podsystémov definujeme ako počet zhromaždených elementov jednotlivých tried priority a stavy celého systému budú definované ako ich súčet. Z nezávislosti vstupných tokov ľahko odvodíme vytvárajúcu funkciu rozdelenia pravdepodobností stavov celého systému.

Nech $\pi_k^{[i]} = \frac{(\lambda_i T)^k}{k!} e^{-\lambda_i T}$ označuje pravdepodobnosti, že počas

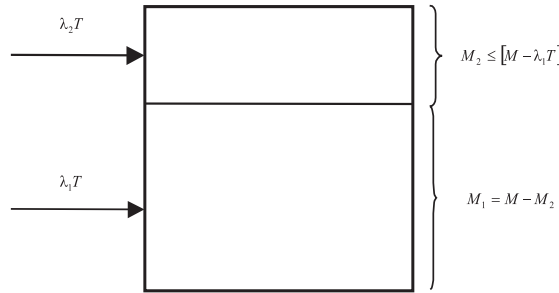
jednej periódy vstúpi do systému práve k elementov i -tej triedy priority. Pravdepodobnosti stavu $S^{[i]}$ na konci periódy pre i -tu triedu priority môžeme potom definovať v súlade s kap. 1 ako pravdepodobnosti $p_k^{[i]} = P(S^{[i]} = k), i = 1, 2$, ktoré sú vyjadrené sústavou

rovnic ekvivalentnou sústavou (1.3.). Nech $\varphi^{[i]}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \pi_r^{[i]} z^r$, $F^{[i]}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r^{[i]} z^r$ označujú vytvárajúce funkcie pravdepodob-

ností vstupu elementov do systému a stavov elementov i -tej triedy priority na konci periódy. Pravdepodobnosti stavov celého systému môžeme vyjadriť v tvare

$$p_k = P(S = k) = \sum_{i=0}^k P(S^{[1]} = k - i; S^{[2]} = i) = \sum_{i=0}^k p_{k-i}^{[1]} \cdot p_i^{[2]}$$

$E(D) = M - \lambda_1 T$, so we shall set $M_2 \leq [M - \lambda_1 T]$, where $[x]$ denotes an integer part of the number x , the greatest integer $\leq x$. $M_1 = M - M_2$ assigns the capacity for the elements of the first class. So, both the out-going capacities M_1, M_2 are discretely dependent on the length of the accumulation period.



Obr. 1. Rozdelenie celkovej výstupnej kapacity M pre obe triedy priority

Fig. 1. Dividing of the total out-going capacity M for both classes of priority

Imagine now that our system of storage is composed of two different parts (two fictive subsystems) when the accumulated elements are served at the same time immediately after the end of the storage period by a common machine with the total out-going capacity M . The first part disposes of the out-going capacity M_1 and the second part of capacity M_2 related to the existing period T . To each part of a system incomes independent stream of elements respecting Poisson distribution with the mean-value of entered elements $\lambda_1 T > 0, \lambda_2 T >$

> 0 , see Fig. 1. Previous adaptation of the self-out-going capacities to the classes of priorities gives a feasible approximation for the system with priority classes and enables us to use a solving method from [3].

A stability condition of such an accumulation system is given by a requirement so that an equivalent condition to (1.1.) applied for entered elements of each class of priority. Thus, we have $\lambda_i T < M_i, i = 1, 2$. The utilisation factor $\rho^{[i]}$ for each fictive subsystem of the priority class is given by a following expression

$$\rho^{[1]} = \frac{\lambda_1 T}{M_1} = \frac{\lambda_2 T}{M - M_2} \text{ and } \rho^{[2]} = \frac{\lambda_2 T}{M_2}. \quad (2.2.)$$

States of single subsystems are defined as a number of accumulated elements of single priority classes and states of a whole system will be defined as their sum. From an independence of incoming streams we shall easily derive a probability generating function of the states of the whole system.

Let expression $\pi_k^{[i]} = \frac{(\lambda_i T)^k}{k!} e^{-\lambda_i T}$ denote probabilities of

incoming exactly k elements of the i th priority class. The probabilities of state $S^{[i]}$ at the end of the period for the i th priority class can be defined according to chapter 1 as the probabilities $p_k^{[i]} = P(S^{[i]} = k), i = 1, 2$, which are expressed by a system of equa-

tions equivalent to (1.3.). Let $\varphi^{[i]}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \pi_r^{[i]} z^r$, $F^{[i]}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r^{[i]} z^r$

denote the probability generating functions of incoming elements of i -th class and states at the end of the period respectively. The probabilities of the whole system states can be expressed by

a zodpovedajúcu vytvárajúcu funkciu

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_{k-r}^{[1]} p_r^{[2]} z^k = F^{[1]}(z)F^{[2]}(z).$$

Strednú hodnotu stavu na konci periódy získame obvyklým spôsobom. Vypočítame prvú deriváciu vytvárajúcej funkcie v bode $z = 1$. Dostaneme

$$E(S) = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} F^{[1]}(z)F^{[2]}(z) \right|_{z=1} = E(S^{[1]}) + E(S^{[2]}), \quad (2.3.)$$

a čiastočné stredné hodnoty $E(S^{[l]})$ pre každú triedu priority dostaneme pomocou (1.4.).

Strednú hodnotu zvyšku na konci periódy vyjadríme z (1.5.) pomocou (2.3.). Tak dostaneme

$$E(Z) = E(S) - \lambda_1 T - \lambda_2 T = E(S^{[1]}) - \lambda_1 T + E(S^{[2]}) - \lambda_2 T = E(Z^{[1]}) + E(Z^{[2]}).$$

Celková doba strávená v systéme je tvorená dobou, ktorú strávia v systéme elementy každej triedy priority. Analogicky podľa [1] a pomocou (1.5.) môžeme túto dobu vyjadriť vo forme

$$w^{[l]} = \left(E(Z^{[l]}) + \frac{\lambda_l T}{2} \right) \cdot T = \left(E(S^{[l]}) - \frac{\lambda_l T}{2} \right) \cdot T. \quad (2.4.)$$

2.2 Optimálne rozdelenie celkovej výstupnej kapacity pre triedy priorít

V tejto časti sa budeme zaoberať úlohou rozdelenia celkovej výstupnej kapacity M pre jednotlivé triedy priority. Veľkosti výstupných kapacít sú pre obe triedy priority diskretné závislé a podľa úvodného predpokladu zviazané vzťahom $M = M_1 + M_2$. Za kritérium optimálneho rozdelenia zoberieme strednú hodnotu zvyšku elementov po ukončení periódy. Budeme teda minimalizovať účelovú funkciu

$$Z(T) = E(Z^{[1]}) + E(Z^{[2]}), \quad (2.5.)$$

pri danej dĺžke periódy zhromažďovania T .

Vzhľadom na závislosť jednotlivých výstupných kapacít a stabilizačnú podmienku (2.2.), nemôžeme hodnoty M_1, M_2 voliť ľubovoľne. Zo stabilizačných podmienok pre obe triedy priority dostávame, že $\lambda_1 T < M_1$ a $\lambda_2 T < M_2$. Z prvej podmienky ďalej dostaneme $\lambda_1 T < M - M_2$ a po úprave $M_2 < M - \lambda_1 T$. Z oboch podmienok ďalej dostaneme podmienku

$$\lambda_2 T < M_2 < M - \lambda_1 T, \quad (2.6.)$$

ktorá určuje konečný počet celočíselných hodnôt výstupnej kapacity M_2 . Postupným prepočtom kritériálnej funkcie (2.5.) nájdeme takú kapacitu, pre ktorú (2.5.) nadobúda minimum. Hodnota M_1 výstupnej kapacity prvej triedy priority je už potom určená jednoznačne.

Za strednú hodnotu zvyšku na konci periódy $E(Z^{[l]})$ do (2.5.) dosadíme zodpovedajúce vzťahy (1.4a, b.) upravené podľa (1.5.).

and a corresponding generating function

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k p_{k-r}^{[1]} p_r^{[2]} z^k = F^{[1]}(z)F^{[2]}(z).$$

We can obtain a mean-value of the state at the end of period by a usual method. Compute the first derivative at point $z = 1$. So, we get

$$E(S) = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} F^{[1]}(z)F^{[2]}(z) \right|_{z=1} = E(S^{[1]}) + E(S^{[2]}), \quad (2.3.)$$

and partial mean values $E(S^{[l]})$ can be expressed by (1.4a, b.) for each class of priority.

The mean-value of the rest at the end of period is expressed again from (1.5.) by (2.3.). So, we can write

$$E(Z) = E(S) - \lambda_1 T - \lambda_2 T = E(S^{[1]}) - \lambda_1 T + E(S^{[2]}) - \lambda_2 T = E(Z^{[1]}) + E(Z^{[2]}).$$

Overall time spent in the system is formed by the time which elements of each class of priority spend in a system. According to [1] and (1.5.) we can express the time in the form

$$w^{[l]} = \left(E(Z^{[l]}) + \frac{\lambda_l T}{2} \right) \cdot T = \left(E(S^{[l]}) - \frac{\lambda_l T}{2} \right) \cdot T. \quad (2.4.)$$

2.2 Optimal decomposition of the total out-going capacity to the priority classes

In this part we shall deal with a problem of a decomposition of out-going capacity M for individual priority classes. Proportions of out-going capacities are for both priority classes discretely dependent and they are joined by the following preliminary assumption $M = M_1 + M_2$. For the optimal decomposition criteria we can take the mean-value of the rest of the elements at the end of the period. We shall minimise the objective function

$$Z(T) = E(Z^{[1]}) + E(Z^{[2]}), \quad (2.5.)$$

at given length of the storage period T .

According to the dependency of particular capacities and steady-state condition (2.2.), we cannot choose the values M_1, M_2 arbitrarily. The steady-state conditions for the both classes of priority yield $\lambda_1 T < M - M_2$ and after setting we have $M_2 < M - \lambda_1 T$. From the both conditions we shall have the condition

$$\lambda_2 T < M_2 < M - \lambda_1 T, \quad (2.6.)$$

which determines a finite number of integers of out-going capacity M_2 . By a sequential computing objective function (2.5.) we take such a capacity for which (2.5.) gets a minimal value. Value M_1 of out-going capacity of the first class of priority is then determined.

We substitute corresponding terms (1.4a, b.) modified according to (1.5.) for the mean-value of the rest at the end of period

Stredná hodnota $E(Z^{[l]})$ pre $M \geq 2$ závisí od koreňov charakteristickej rovnice vo výraze $\sum_{k=0}^{M_i} (1 - z_k^{[l]})^{-1}$ pre zaťaženia $\rho^{[l]}$ z (2.2.), ktoré hľadáme vhodnou numerickou metódou postupom opísaným v [2]. Podľa [3] pre podstatné zjednodušenie, môžeme použiť lineárnu aproximáciu $\sum_{k=0}^{M_i} (1 - z_k^{[l]})^{-1} \approx f^{[l]}(M_i, \rho^{[l]}) = a_1(M_i)\rho^{[l]} + a_0(M_i)$, ktorej koeficienty závislé od M_i sú v tvare

$$a_1(M_i) = 0.4045M_i - 0.6609, a_0(M_i) = 0.525M_i - 0.5114. \quad (2.7.)$$

Celkový postup ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad: Pre systém zhromažďovania s dvoma triedami priorit majme dané: intenzity vstupu $\lambda_1 = 3 \text{ el./h.}$, $\lambda_2 = 2 \text{ el./h.}$, spoločnú periódu zhromažďovania $T = 1,2 \text{ h}$ a výstupnú kapacitu $M = 10 \text{ el.}$

Po dosadení do (2.6.) dostaneme $2,4 < M_2 < 6,4$. Potrebné výpočty zostavíme do nasledujúcej tab. 1.

Optimálne rozdelenie celkovej výstupnej kapacity M Tab. 1.

M_2	M_1	$\rho^{[2]}$	$\rho^{[1]}$	$E(Z^{[2]})$	$E(Z^{[1]})$	$Z(1,2)$
3	7	0,80	0,51	1,73	0,05	1,78
4	6	0,60	0,60	0,24	0,17	0,41
5	5	0,48	0,72	0,06	0,56	0,62
6	4	0,40	0,90	0,02	3,60	3,62

Z tabuľky vidíme, že optimálne rozdelenie celkovej výstupnej kapacity $M = 10 \text{ el.}$ je pre triedy priority nasledovné: pre prvú triedu $-M_1 = 6 \text{ el.}$, pre druhú triedu $-M_2 = 4 \text{ el.}$

2.3 Optimálna dĺžka periódy zhromažďovania

Závažným problémom pri efektívnom riadení procesov zhromažďovania na čas je stanovenie okamžikov ukončenia akumulácie elementov, t. j. stanovenie dĺžky periódy. Optimalizačná metóda dĺžky periódy uvedená v [3] berie do úvahy prevádzkové náklady systému zhromažďovania s dvoma nezávislými vstupnými tokmi elementov, z ktorých každý druh má rezervovanú vlastnú maximálnu výstupnú kapacitu zo systému. Po jednoduchšej modifikácii, môžeme tento postup použiť pre uvažovaný model s prioritami.

Označme $c_1^{[l]} > 0$ náklady na obsluhu jedného elementu, $c_2^{[l]} > 0$ fixné náklady na prevádzku počas jednej periódy a $c_3^{[l]} > 0$ náklady na pobyt v systéme a vo fronte pripadajúce na jeden element i -tej triedy priority za jednotku času. Počas jednej periódy systém priemerne obsluží λT elementov a čiastkové náklady na ich obsluhu budú $C_1^{[l]}(T) = c_1^{[l]} \lambda_i T$ peňažných jednotiek predpokladu lineárnej závislosti nákladov od množstva obsluženej

$E(Z^{[l]})$ to (2.5.). The mean-value $E(Z^{[l]})$ for $M \geq 2$ depends on the roots of characteristic equation in the term $\sum_{k=0}^{M_i} (1 - z_k^{[l]})^{-1}$ for utilising factor $\rho^{[l]}$ from (2.2.), which are searched for by a proper numerical method using the procedure described in [2]. According to [3], for a significant simplifying we can use a linear approximation $\sum_{k=0}^{M_i} (1 - z_k^{[l]})^{-1} \approx f^{[l]}(M_i, \rho^{[l]}) = a_1(M_i)\rho^{[l]} + a_0(M_i)$, whose coefficients dependent on M_i have the form

We show the overall previous procedure in the following example.

Example: Let us have given for the storage system with two priority classes as follows: the incoming rates $\lambda_1 = 3 \text{ el./h.}$, $\lambda_2 = 2 \text{ el./h.}$, a common storage period $T = 1.2 \text{ h}$ and the out-going capacity $M = 10 \text{ el.}$

From (2.6.) after substituting we shall obtain $2.4 < M_2 < 6.4$. Necessary calculations will be assembled to the Tab. 1.

Optimal decomposition of the total out-going capacity M Tab. 1.

M_2	M_1	$\rho^{[2]}$	$\rho^{[1]}$	$E(Z^{[2]})$	$E(Z^{[1]})$	$Z(1,2)$
3	7	0.80	0.51	1.73	0.05	1.78
4	6	0.60	0.60	0.24	0.17	0.41
5	5	0.48	0.72	0.06	0.56	0.62
6	4	0.40	0.90	0.02	3.60	3.62

We can see from the Tab.1. that the optimal decomposition of total out-going capacity $M = 10 \text{ el.}$ for the both priority classes is as follows: for the first class $-M_1 = 6 \text{ el.}$, for the second class $-M_2 = 4 \text{ el.}$

2.3 Optimal length of the storage period

A relevant problem within the effective time control of the storage processes is a setting of the moments when the accumulation of elements will end (i.e. the setting of the period duration). The optimising method of the length of period in [3] regards the costs of the storage system with two independent incoming streams of elements where each variety of elements has a reserved actual out-going capacity from the system. We can use that technique after a simple modification for the reasoned model with priorities.

Let us denote $c_1^{[l]} > 0$ the service costs of one element, $c_2^{[l]} > 0$ denotes fixed costs for performing the system during one period and $c_3^{[l]} > 0$ are the costs for remaining in the system and a waiting line corresponding one element of the i th class of priority per time unit. The system serves λT elements in average during one period and their costs will be $C_1^{[l]}(T) = c_1^{[l]} \lambda_i T$ under the assumption of linear dependence on the amount of the served elements. If we

záťaže. Ak ich upravíme o fixné náklady, dostaneme $C_1^{[i]}(T) = c_1^{[i]} \lambda_i T + c_2^{[i]}$. Čiastkové náklady na dobu strávenú v systéme (2.4.) budú činiť $C_2^{[i]}(T) = c_3^{[i]} w^{[i]}$ peňažných jednotiek.

Celkové náklady v závislosti od dĺžky periódy môžeme potom vyjadriť funkciou celkových nákladov

$$C(T) = C_1^{[i]}(T) + C_2^{[i]}(T) = c_1^{[i]} \lambda_i T + c_2^{[i]} + c_3^{[i]} w^{[i]} \quad (2.8.)$$

združujúcou čiastkové náklady na obsluhu a prestoje v systéme.

Pri daných nákladových sadzbách môžeme celkové náklady znížiť tým spôsobom, že budeme minimalizovať fixné náklady $c_2^{[i]} > 0$ rozložením na väčší počet obslužených elementov tak, že vyjadríme pomernú časť celkových nákladov (2.8.) pripadajúcu na jeden obslužený element vydelením hodnoty $C^{[i]}(T)$ priemerným počtom obslužených elementov zodpovedajúcej triedy priority za jednu periódu $\lambda_i T$. Z nákladovej funkcie (2.8.) potom dostaneme

$$N^{[i]}(T) = \frac{C^{[i]}(T)}{\lambda_i T} = c_1^{[i]} + \frac{c_2^{[i]}}{\lambda_i T} + c_3^{[i]} \frac{w^{[i]}}{\lambda_i T}. \quad (2.9.)$$

Pre obe triedy priority vytvoríme združenú nákladovú funkciu

$$\begin{aligned} N(T) &= N^{[1]}(T) + N^{[2]}(T) = c_1^{[1]} + \frac{c_2^{[1]}}{\lambda_1 T} + c_1^{[2]} + \frac{c_2^{[2]}}{\lambda_2 T} + c_3^{[1]} \frac{w^{[1]}}{\lambda_1 T} + c_3^{[2]} \frac{w^{[2]}}{\lambda_2 T} = \\ &= c_1^{[1]} + \frac{c_2^{[1]}}{\lambda_1 T} + \frac{c_3^{[1]}}{\lambda_1} \left(E(Z^{[1]}) + \frac{\lambda_1 T}{2} \right) + c_1^{[2]} + \frac{c_2^{[2]}}{\lambda_2 T} + \frac{c_3^{[2]}}{\lambda_2} \left(E(Z^{[2]}) + \frac{\lambda_2 T}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.10.)$$

Zo stabilizačných podmienok $\lambda_1 T < M_1$, $\lambda_2 T < M_2$ pre obe triedy zhromažďovania dostaneme ohraničenie pre dĺžku periódy

$$T < \min \left\{ \frac{M_1}{\lambda_1}, \frac{M_2}{\lambda_2} \right\}.$$

Pre výpočet $E(Z^{[i]})$ v (2.10.) znovu využijeme zodpovedajúce aproximácie (2.7.) upravené podľa (1.5.).

Závislosť jednotlivých výstupných kapacít M_1 , M_2 pre obe triedy priority nám neumožňuje analytické riešenie vo vzťahu (2.10.). Použijeme teda metódu postupných prepočtov pre vybrané dĺžky periódy aplikáciou podmienky (2.6.), z ktorých potom vyberieme optimálnu hodnotu.

Příklad: Pre systém zhromažďovania s dvoma triedami priorít majme dané: intenzity vstupu $\lambda_1 = 0,42$ el./h, $\lambda_2 = 0,24$ el./h a výstupnú kapacitu $M = 7$ el.

Zo stabilizačných podmienok pre obe triedy zhromažďovania

dostaneme ohraničenie pre dĺžku periódy $T < \min \left\{ \frac{M_1}{\lambda_1}, \frac{M_2}{\lambda_2} \right\}$. Pre dané číselné hodnoty máme

$$T < \min \left\{ \frac{7}{0,42}, \frac{7}{0,24} \right\} \approx 14,28.$$

Ďalej položíme $T = 1$ a výpočty zostavme do tab. 2. Z podmienky (2.6.) určíme zodpovedajúce hodnoty výstupnej kapacity

adjust them to fixed costs we shall get $C_1^{[i]}(T) = c_1^{[i]} \lambda_i T + c_2^{[i]}$. Partial costs for the time which the elements spent in the system (2.4.) will be $C_2^{[i]}(T) = c_3^{[i]} w^{[i]}$ of the monetary units.

Total costs function of the length of the period T can be expressed

$$C(T) = C_1^{[i]}(T) + C_2^{[i]}(T) = c_1^{[i]} \lambda_i T + c_2^{[i]} + c_3^{[i]} w^{[i]} \quad (2.8.)$$

which joins the partial costs for service and the time spent in the system.

At given cost rates we can reduce the global costs if we minimise fixed costs $c_2^{[i]} > 0$ by their distribution to a higher number of served elements by expressing a relative part of the total costs (2.8.) corresponding to one served element dividing the value $C^{[i]}(T)$ by the average number of served elements corresponding to the class of the priority per one period $\lambda_i T$. From the costs function (2.8.) then we shall get

$$N^{[i]}(T) = \frac{C^{[i]}(T)}{\lambda_i T} = c_1^{[i]} + \frac{c_2^{[i]}}{\lambda_i T} + c_3^{[i]} \frac{w^{[i]}}{\lambda_i T}. \quad (2.9.)$$

We construct comprehensive costs function for the both priority classes

$$\begin{aligned} N(T) &= N^{[1]}(T) + N^{[2]}(T) = c_1^{[1]} + \frac{c_2^{[1]}}{\lambda_1 T} + c_1^{[2]} + \frac{c_2^{[2]}}{\lambda_2 T} + c_3^{[1]} \frac{w^{[1]}}{\lambda_1 T} + c_3^{[2]} \frac{w^{[2]}}{\lambda_2 T} = \\ &= c_1^{[1]} + \frac{c_2^{[1]}}{\lambda_1 T} + \frac{c_3^{[1]}}{\lambda_1} \left(E(Z^{[1]}) + \frac{\lambda_1 T}{2} \right) + c_1^{[2]} + \frac{c_2^{[2]}}{\lambda_2 T} + \frac{c_3^{[2]}}{\lambda_2} \left(E(Z^{[2]}) + \frac{\lambda_2 T}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.10.)$$

From the stability conditions $\lambda_1 T < M_1$, $\lambda_2 T < M_2$ for the both priority classes we shall get the limitation for the length of

$$\text{the period } T < \min \left\{ \frac{M_1}{\lambda_1}, \frac{M_2}{\lambda_2} \right\}.$$

For computing $E(Z^{[i]})$ to (2.10.) we again use corresponding approximation terms (2.7.) adapted according to (1.5.).

Dependence of the individual out-going capacities M_1 , M_2 for the classes of priority does not allow us an analytical solution in (2.10.). Thus we use a method of consecutive calculations for the chosen lengths of period by application the condition (2.6.), from which we choose an optimal value.

Example: Let us have given for the system of storage with two priority classes as follows: the incoming rates $\lambda_1 = 0,42$ el./h, $\lambda_2 = 0,24$ el./h and the out-going capacity $M = 7$ el.

From the limitation for the length of the period

$$T < \min \left\{ \frac{M_1}{\lambda_1}, \frac{M_2}{\lambda_2} \right\}, \text{ for given numerical values we have}$$

$$T < \min \left\{ \frac{7}{0,42}, \frac{7}{0,24} \right\} \approx 14,28.$$

The next step is to set $T = 1$ and assemble calculations to the Tab. 2. We define corresponding values of the out-going capacity M_2 from the condition (2.6.). We shall get $M_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

M_2 . Pretože $0,24 < M_2 < 7 - 0,42$, dostaneme, že $M_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu M_2 zo vzťahu $M = 7 = M_1 + M_2$ určíme hodnotu výstupnej kapacity M_1 . Pre zvolenú dĺžku periódy a určené výstupné kapacity M_1, M_2 postupne vypočítame hodnoty funkcie (2.10.). Optimálne náklady zistíme jednoducho prehľadným stĺpca $N(1)$.

Tab. 2

M_1	M_2	$\rho^{[1]}$	$\rho^{[2]}$	$N(1)$
6	1	0.07	0.24	2252.2
5	2	0.08	0.12	2252.1
4	3	0.11	0.08	2255.8
3	4	0.14	0.06	2259.6
2	5	0.21	0.05	2264.3
1	6	0.42	0.04	2300.8

Zvoľme $T = 3$. Z podmienky (2.6.) dostaneme prípustné hodnoty výstupnej kapacity M_2 pre, ktoré sú výpočty zoradené v tab.3.

Pre $T = 5$ a $T = 9$ sú výsledky zostavené v tab. 4. a tab. 5.

Tab. 4

M_1	M_2	$\rho^{[1]}$	$\rho^{[2]}$	$N(5)$
5	2	0.42	0.6	1054.1
3	4	0.52	0.4	990.2
3	4	0.7	0.3	1066.0

Nasledujúci obr. 2. ukazuje závislosť nákladov vo funkcii (2.10.) od dĺžky periódy T pre vybrané parametre: $\lambda_1 = 0,42$, $\lambda_2 = 0,24$, $M = 7$.

Ako vidíme aj z obr. 2, podrobnejším prepočtom pre $T \in \langle 4; 5 \rangle$ zistíme, že funkcia (2.9.) nadobúda minimum pre periódu $T = 4,5$ s nasledujúcimi hodnotami: $M_1 = 4$, $M_2 = 3$ zaťažienami $\rho^{[1]} = 0,47$, $\rho^{[2]} = 0,36$ a hodnotou $N(4,5) = 983$.

3 Záver

V prvej časti príspevku sú definované a odvodené základné stredné hodnoty popisujúce efektívnosť činnosti uvažovaného systému zhromažďovania s dvoma triedami priorit. To nám dáva možnosť využiť tieto charakteristické stredné hodnoty pre odvodenie optimálnej dĺžky periódy zhromažďovania elementov. V druhej časti príspevku je analyzovaná metóda nákladovej optimalizácie dĺžky periódy minimalizujúca fixné náklady podľa počtu obslužených elemen-

as $0,24 < M_2 < 7 - 0,42$. We shall define a value of the out-going capacity M_1 for each value M_2 from $M = 7 = M_1 + M_2$. For a chosen length of the period and determined out-going capacities M_1, M_2 we shall compute values of the function (2.10.) in successive steps. We shall find out the optimal costs simply by searching the last column $N(1)$.

Tab. 3

M_1	M_2	$\rho^{[1]}$	$\rho^{[2]}$	$N(3)$
6	1	0.21	0.72	1317.8
5	2	0.25	0.36	1083.0
4	3	0.32	0.24	1076.1
3	4	0.42	0.18	1088.0
2	5	0.63	0.14	1153.4

Let us choose $T = 3$. From the condition (2.6.) $0,72 < M_2 < 5,74$ we shall obtain feasible values of the out-going capacity M_2 whose calculations are aligned in the Tab. 3.

For $T = 5$ and $T = 9$ results are set in the Tab. 4. and Tab. 5.

Tab. 5

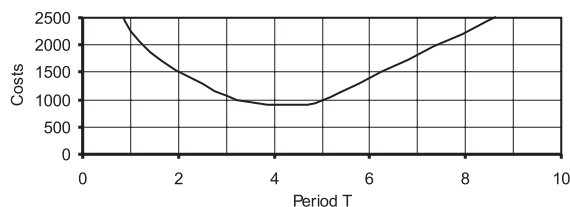
M_1	M_2	$\rho^{[1]}$	$\rho^{[2]}$	$N(9)$
4	3	0.98	0.7	2675.7

Following Fig. 2. shows a dependency of the costs in the function (2.10.) on the length of period T for the selected parameters: $\lambda_1 = 0,42$, $\lambda_2 = 0,24$, $M = 7$.

As we can see in the Fig. 2, exact computing for $T \in \langle 4; 5 \rangle$ will show that the function (2.10.) get the minimum for the period $T = 4,5$ with following values: $M_1 = 4$, $M_2 = 3$ the utilisation factors $\rho^{[1]} = 0,47$, $\rho^{[2]} = 0,36$ and costs $N(4,5) = 983$.

3 Conclusions

In the first part of the paper basic characteristic mean-values are defined and derived describing effective functioning of the considered storage system with two priority classes. It gives us a possibility to exploit those characteristic mean-values for deriving the optimal length period of element accumulation. In the second part of the paper is analysed the costs optimising method of the length of period minimising fixed costs according to the amount of served



Obr. 2. Závislosť nákladov funkcie (2.10.) na dĺžke periódy
Fig. 2. Cost dependency of the function (2.10.) on the length of period

tov počas jednej periódy. Taktiež je navrhnutá možnosť optimálneho rozdelenia celkovej výstupnej kapacity pre triedy priorit minimalizujúca celkový zvyšok elementov bez ohľadu na triedu priority.

Podakovanie

Táto práca bola podporovaná Ministerstvom školstva a vedy SR v rámci grantového projektu č. 1/7211/20.

elements during one period. There is also suggested a possibility of the optimal decomposing of the total out-going capacity for the classes of priority minimising the cumulative rest of elements regardless the class of the priority.

Acknowledgement

This paper was supported by the Ministry of Education of the Slovak Republic under grant No. 1/7211/20.

Literatúra - References

- [1] ČERNÝ, J., KLUVÁNEK, P.: *Základy matematickej teórie dopravy*, Veda, Bratislava 1990
- [2] REBO, J.: *Discrete process of storage*, Proceedings of International Conference On Mathematical Methods in Economics, pp. 171-178, University Of West Bohemia, Cheb 1998
- [3] REBO, J.: *Cost optimising of the length of period for the discrete process of storage with two incoming streams of elements*, Proceedings of International Conference On Mathematical Methods in Economics, pp. 231-237, University Of Economics, J. Hradec 1999