Mária Mičeková *

NETRADIČNÝ POHĽAD NA PROGNÓZOVANIE EKONOMICKÝCH PROCESOV

ANOTHER PERSPECTIVE ON THE FORECASTING OF ECONOMIC PROCESSES

Príspevok je zameraný na využitie metód známych z teórie dynamických systémov pri riešení úloh prognózovania ekonomických procesov. Možnosť využitia niektorých teoretických metód v oblasti prognózy je demonštrovaná na príklade predikcie vývoja kurzu USD/SK.

Úvod

Pri analýze, modelovaní a prognózovaní ekonomických procesov sa v súčasnosti stretávame s rôznymi metódami, ktoré využívajú matematicko-štatistické metódy, ekonometrické postupy a systémový prístup. Na väčšinu sociálno-ekonomických procesov sa môžeme pozerať ako na deje, ktoré sa odohrávajú v systémoch najrôznejších vlastností, pričom sa vyznačujú istou zotrvačnosťou. Musíme pripomenúť, že sa nejedná len o zotrvačnosť hmoty, čo je zrejmé pri analýze fyzikálno-technických procesov, ale tiež o zotrvačnosť myslenia ľudí, čo sa prejavuje v správaní sociálno-ekonomických štruktúr. Ak sme ochotní akceptovať zotrvačnosť pri analýze ekonomických štruktúr, potom sme nútení popisovať ich správanie pomocou zodpovedajúcich modelov. Prostredie, v ktorom sa odohrávajú ekonomické procesy je možné chápať ako dynamický systém, pričom vstupné veličiny majú vo väčšine prípadov náhodný charakter, a často je ich možné na vstupe systému kvantifikovať. Odozva systému na známe vstupné veličiny je závislá od statických a dynamických vlastností systému. Ak vlastnosti systému dokážeme s dostatočnou presnosťou popísať, potom pri známych vstupných veličinách dokážeme s danou presnosťou predpovedať správanie sa systému, prípadne predpovedať priebeh vybranej realizácie. S akceptovaním dynamiky sociálno-ekonomických štruktúr sa stretávame v prípade analýzy časových radov, kedy na základe minulých hodnôt sa snažíme predpovedať hodnoty budúce. Odpoveď na otázku ako presné budú predpovedané hodnoty je závislá od dynamiky systému vzhľadom na dĺžku predpovedí a charaktere vstupných veličín. Na základe uvedeného sa pokúsme pozerať na ekonomické procesy ako na deje odohrávajúce sa v dynamickom systéme.

This article describes methods used from dynamic systems theory in solving the tasks of forecasting economic processes. The possibility of using theoretical methods in forecasting is demonstrated with the example of the prediction regarding the development of the rate of exchange between the USD and the SK.

Introduction

In analysing and forecasting economic processes, there are various models which use mathematical-statistical methods, econometrical procedures and systematic approaches. The majority of social-economic processes are the actions located in the systems of various qualities with some inertia. We have to mention that it is not only the inertia of mass that is obvious in analysing economic structures, but it is also inertia of people's thinking that can be seen in the behaviour of social-economic structures. If we are able to accept the inertia in analysing the economic structures then we have to describe their behaviour with the help of corresponding models. The setting in which the economic processes are located is possible to understand as a dynamic system where the input quantities have, in the majority of cases, a random character. Usually, it is possible to quantify them in the input. The answer of the system to a known input depends on the static and dynamic qualities of the system. If we are able to describe the qualities of the system with accuracy, we will also be able to predict the future behaviour of the system with the same accuracy or to predict the course of a chosen realisation. In analysing time series, we have to accept the dynamism of social-economic structures when on the base of past values we are trying to predict future values. The answer to the question of how accurate will the predicted values be depends on the dynamism of the system connected with the length of predictions and with the character of input values. On the basis of these facts, we can try to look at economic processes as processes in a dynamic system.

* **Ing. Mária Mičeková**
Department of Communications, Faculty of Operation and Economics of Transport and Communications, SK-010 26 Žilina, Slovakia
Phone: +421-89-657 355, 655 793

1. Diskrétny dynamický systém

Na základe definície dynamického systému môžeme vzťah medzi vstupom, stavom a výstupom spojitého systému vyjadriť v tvare:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(t_0, t)) \tag{1}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \tag{2}$$

kde φ je prechodová funkcia stavu, ktorá vyjadruje, ako sa stav $x(t_0)$ pôsobením vstupu u na intervale $t_0 < \tau \leq t$ zmenil na stav $x(t)$ v čase t.
g je zobrazenie okamžitého stavu, vstupu a času na výstup.

Pri analýze ekonomických procesov sa väčšinou stretávame s informáciami o správaní sa systému v tvare časových radov. Z uvedeného dôvodu je vhodné ekonomický systém popísať pomocou modelu v tvare diskrétneho dynamického systému:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \tag{3}$$

$$y(k) = g(x(k), u(k), k), \tag{4}$$

kde zobrazenia f a g majú rovnaký význam ako pri popise spojitého dynamického systému. V prípade popisu lineárnych nestacionárnych diskrétnych systémov rovnice (3) a (4) prejdú od tvaru:

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) \tag{5}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k), \tag{6}$$

kde $x(k)$ je n-rozmerný stavový vektor
$y(k)$ je m-rozmerný výstupný vektor
$u(k)$ je r-rozmerný vstupný vektor
$G(k)$ je matica stavu o rozmere n x n
$H(k)$ je matica vstupu o rozmere n x r
$C(k)$ je matica výstupu o rozmere m x n
$D(k)$ je matica priamej väzby medzi vstupom a výstupom rozmeru m x a.

Ak zavedieme matematický model ekonomických systémov v tvare lineárneho diskrétneho dynamického systému, podľa obr.1, je potrebné určiť rád systému (rozmer vektora stavu, n), relevantné vstupné informácie (vektor $u(k)$), analyzované výstupné veličiny (vektor $y(k)$) a prvky matíc $G(k)$, $H(k)$, $C(k)$ a $D(k)$. Rád systému je vo všeobecnosti závislý od dynamických vlastností modelovaného reálneho systému. Vektor $u(k)$ obsahuje všetky dostupné veličiny, ktoré majú vplyv na správanie sa systému. V prípade analýzy ekonomických procesov je etapa výberu relevantných informácií obtiažna a závisí od skúseností o analyzovanom ekonomickom jave. Vektor $y(k)$ je zložený z takých veličín, ktorých priebeh nás zaujíma. Ak máme k dispozícii dostatočne dlhý časový rad, ktorý charakterizuje priebeh vstupných veličín $u(k)$ a odpovedajúci časový rad hodnôt výstupných veličín $y_r(k)$, získaných z reálneho procesu, je možné nastaviť príslušné

1. Discrete dynamic system

On the basis of the definition of a dynamic system, the connection between input, state and output can be defined as :

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(t_0, t)) \tag{1}$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \tag{2}$$

where φ is the step response of state which shows how the state $x(t_0)$ has changed by the operating of input u in the interval $t_0 < \tau \leq t$ to the state $x(t)$ in time t.
g is the function which determines the corresponding output to state, input and time.

In analysing economic processes, there is the information about the behaviour of the system in the form of time series. Consequently, it is suitable to describe the economic system with the help of the model in the form of a discrete dynamic system:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \tag{3}$$

$$y(k) = g(x(k), u(k), k), \tag{4}$$

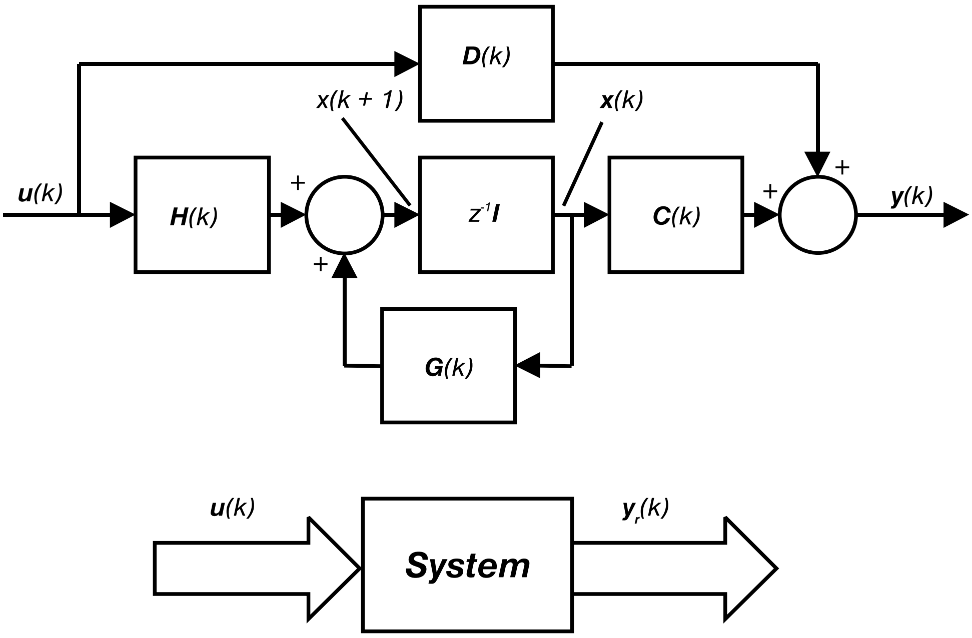
where f and g have the same meaning as they have in the description of the continuous dynamic system. In the description of the linear time-variant discrete system's equations(3) and (4) will be changed to the form:

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k) \tag{5}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k), \tag{6}$$

where $x(k)$ is n - dimensional state vector
$y(k)$ is m - dimensional output vector
$u(k)$ is r - dimensional input vector
$G(k)$ is n x n - dimensional matrix of state
$H(k)$ is n x r - dimensional matrix of input
$C(k)$ is m x n - dimensional matrix of output
$D(k)$ is m x a - dimensional direct matrix between input and output

If we suppose the mathematical model of an economic system in the form of a linear discrete dynamic system (as is shown in Fig.1) it is necessary to determine the order of the system (the dimension of matrix of state, n), the relevant input information (matrix $u(k)$), the analysed output quantities (matrix $y(k)$) and the elements of the matrixes $G(k)$, $H(k)$, $C(k)$ and $D(k)$. In general, the order of the system depends on the dynamic qualities of the modelated real system. The matrix $u(k)$ contains all accessible quantities which have influence on the behaviour of the system. In the analysing of economic processes there is a stage of choosing relevant information that is very difficult and depends on the experiences of the analysed economic phenomenon. The matrix $y(k)$ contains the quantities which have no interesting course for us. If we have time-series with sufficient length which characterise the course of input quantities $u(k)$ and corresponding



Obr. 1. Štruktúra lineárneho diskrétneho dynamického systému
Fig.1 Structure of the linear discrete dynamic system

hodnoty matíc tak, aby sa minimalizoval rozdiel medzi výstupom reálneho systému $y_r(k)$ a výstupom modelu $y(k)$. Tento proces sa často nazýva nastavovaním modelu. Metódy priebežného nastavovania modelu sú uvedené napr. v [1] a [2]. Uvedený matematický model sa využíva najmä na hodnotenie vplyvu jednotlivých vstupných veličín $u(k)$ na správanie sa systému. Je možné ho však využiť aj na riešenie úloh predikcie. V tomto prípade musíme poznať, prípadne predpovedať priebeh vstupných veličín $u(k)$ v časovom rozsahu predikcie. Pri značnom zjednodušení môžeme hodnoty vstupných veličín $u(k)$ považovať za nulové. Potom sa stretávame s dynamickým systémom, ktorého správanie je definované len počiatočnými podmienkami, hodnotami zložiek vektora $x(k)$. Tento model potom odpovedá používaným autoregresným modelom časových radov. Vzťahy (5) a (6) prejdú od tvaru:

$$x(k+1) = G(k)x(k) \tag{7}$$

$$y(k) = A(k)x(k) \tag{8}$$

Nech $y(k)$ obsahuje len jednu zložku a stavový vektor $x(k)$ bude tvorený predchádzajúcimi hodnotami výstupnej veličiny $y(k)$ podľa vzťahu (9), potom nasledujúcu hodnotu $y(k+1)$ určíme z n predchádzajúcich hodnôt na základe vzťahu (10), prípadne (11).

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ . \\ . \\ y(k-n-1) \end{bmatrix} \tag{9}$$

time series of quantities $y_r(k)$ acquired from real process, it is possible to tune the relevant values of the matrix to minimise the difference between the output of the real system $y_r(k)$ and the output of model $y(k)$. This process is named "continuous tuning" The methods of continuous tuning are described in [1] and [2]. The mathematical model mentioned is used to evaluate the influence of input qualities on the behaviour of the system. It is possible to use it also in the solutions of the tasks of prediction. In this case we have to know or to predict the course of input quantities $u(k)$ in the time extend of prediction. After simplifying, we can consider the values of input quantities $u(k)$ to 0. Then there is a dynamic system with its behaviour defined by the initial conditions - values of matrix $x(k)$. This model corresponds to used autoregress models of time-series. The relationships (5) and (6) will be changed to:

$$x(k+1) = G(k)x(k) \tag{7}$$

$$y(k) = A(k)x(k) \tag{8}$$

If $y(k)$ contains only one element and state matrix x(k) previous values of output quantity $y(k)$ according to (9) then next value $y(k+1)$ can be determined from n - previous values on the basis of (10) or (11).

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ . \\ . \\ y(k-n-1) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$y(k+1) = A(k)x(k) \tag{10}$$

$$y(k+1) = a_1(k)y(k) + a_2(k)y(k-1) +$$

$$+ \; .....\, a_n(k)y(k-n-1) \tag{11}$$

Poznamenajme, že v prípade uvedeného zjednodušenia matica $A(k)$ bude tvorená jedným riadkom s prvkami $a_1(k)$ až $a_n(k)$. V procese priebežného nastavovania parametrov modelu $A(k)$ musíme nájsť také hodnoty prvkov matice A, aby sme minimalizovali vopred stanovené kritérium. V úlohách predikcie najčastejšie minimalizujeme kvadrát rozdielu medzi predpovedanou a skutočnou hodnotou. Metódy nastavovania matice A vychádzajú z teórie stochastických aproximácií pri priebežnom nastavovaní, alebo z korelačných závislostí medzi súborom vstupných a výstupných hodnôt.

2. Experimentálne overenie

Na základe uvedených teoretických východísk bol zostavený jednoduchý matematický model, pomocou ktorého boli predpovedané niektoré vybrané ekonomické ukazovatele [2]. Na ilustráciu činnosti uveďme model predikcie kurzu USD/SK v období od 1. 4. 1996 do 23. 2. 1998. V uvedenom období bolo vydaných 473 kurzových lístkov, čo je dostatočný počet na nastavenie modelu i na samotnú predikciu pomocou nastaveného modelu.

Priebežné nastavovanie parametrov modelu sa realizovalo v každom kroku na základe rekurentného predpisu:

$$A(k+1) = A(k) + C(k)(y_r(k+1) -$$

$$- A(k)x(k+1))x(k+1) \tag{12}$$

Predpovedaná hodnota o jeden krok sa vypočíta na základe vzťahu:

$$y(k+1) = A(k)x(k), \tag{13}$$

pričom:

$$A(k) = [\, a_1(k), a_2(k), \dots .\, a_n(k)]$$

$$xT(k) = [\, y_a(k), y_a(k-1), \dots y_a(k-n-1)],$$

kde:

$$y_a(k) = \begin{cases} y_r(k) \; ak \; k \leq m \\ y(k) \; ak \; k > m \end{cases}$$

Pričom m je okamžik, v ktorom bol na výstupe analyzovaného reálneho systému získaný posledný známy údaj. Od okamžiku m sa stretávame s prognózou. Na hodnotách matice $C(k)$ je závislá rýchlosť konvergencie matice $A(k)$, a tým aj rýchlosť prispôsobenia sa modelu časovo lokálnym zmenám v charaktere sle-

$$y(k+1) = A(k)x(k) \tag{10}$$

$$y(k+1) = a_1(k)y(k) + a_2(k)y(k-1) +$$

$$+ \; .....\, a_n(k)y(k-n-1) \tag{11}$$

After the mentioned simplifying the matrix $A(k)$ will contain only one line with the elements $a_1(k)$ to $a_n(k)$. In the process of the continuous tuning of parameters of model $A(k)$, we have to find the values of the elements of matrix A to minimise the initial criterion. Most often in the tasks of prediction we minimise the quadrate of difference between the predicted and the real value. The methods of tuning of matrix A are based on the theory of stochastic approximation or on the correlated determination between input and output values

2. Experimental verification

On the basis of the mentioned theoretical points, a simple mathematical model was created. With the help of this model, the chosen economic indicators were predicted [2]. To show the functioning of this model, we will use the model of prediction of the rate of exchange USD/SK from 1. 4. 96 to 23. 2. 98 . In this time period, 473 rate of exchange tickets were published. That is enough for the tuning of the model and also for the prediction. Continuous tuning of the parameters of the model was realised in each step on the basis of recursive relationship:

$$A(k+1) = A(k) + C(k)(y_r(k+1) -$$

$$- A(k)x(k+1))x(k+1) \tag{12}$$

Predicted value after the first step will be calculated on the basis of:

$$y(k+1) = A(k)x(k), \tag{13}$$

where:

$$A(k) = [\, a_1(k), a_2(k), \dots .\, a_n(k)]$$

$$xT(k) = [\, y_a(k), y_a(k-1), \dots y_a(k-n-1)],$$

where:

$$y_a(k) = \begin{cases} y_r(k) \; ak \; k \leq m \\ y(k) \; ak \; k > m \end{cases}$$

M is the moment in which the last known value in the output of the analysed real system was acquired. From the moment m, we use the forecast. The speed of convergention of matrix $A(k)$ and the speed of assimilation of the model to time local variations in the character of observed quality depends on the values of matrix dovanej veličiny. Vplyv výpočtu matice $C(k)$ na presnosť prognózy nie je triviálny a je diskutovaný v práci [2]. Proces nastavovania matice $A(k)$ (15 prvkov) je znázornený na obr. 3. Na obr. 2 je uvedený vývoj relatívneho centrovaného kurzu USD/SK v období od 1. 4. 1996 do 23. 2. 1998. Relatívny centrovaný kurz je určený vzťahom:

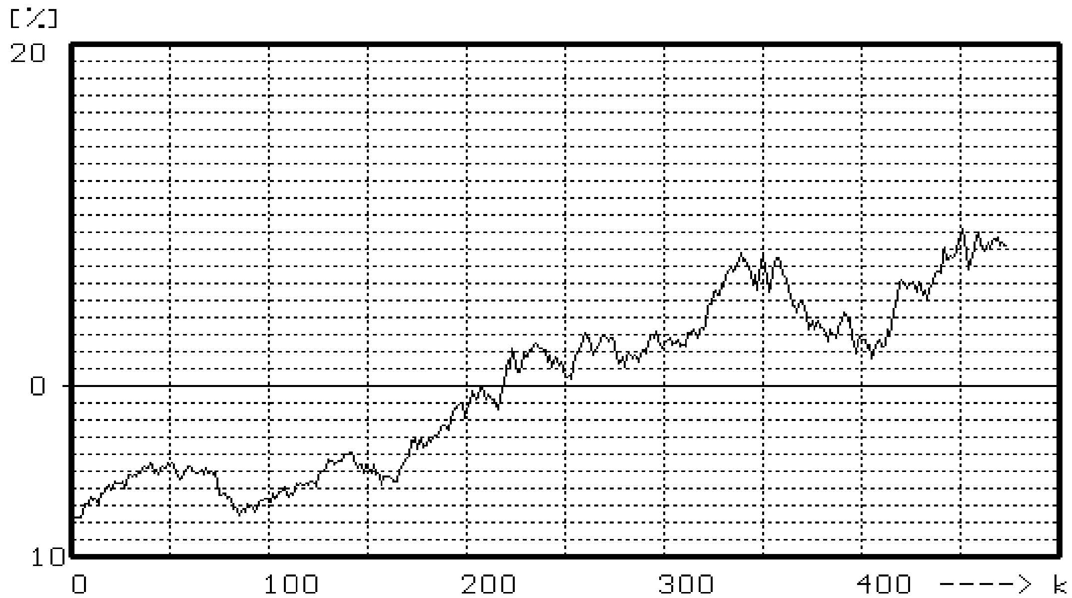
$$R(i) = 100(k(i) - k_p)/k_p\,, \quad [\%] \tag{14}$$

kde k_p je hodnota priemerného kurzu za celé sledované obdobie.

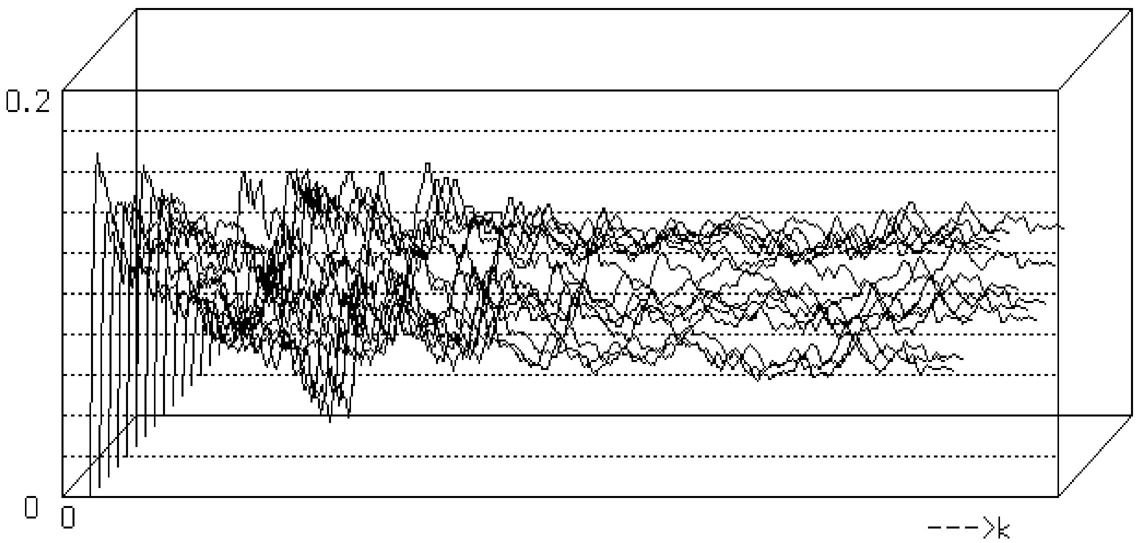
$C(k)$. The influence of the calculation of matrix $C(k)$ at the accuracy of forecast is not trivial and is discussed in [2]. The process of the tuning of the matrix $A(k)$ (15 elements) is shown in Fig. 3. Fig. 2 shows the development of the relative centred rate of exchange USD/SK in the period from 1. 4. 96 to 23. 2. 98. The relative centred rate of exchange is defined by the relationship:

$$R(i) = 100(k(i) - k_p)/k_p\,, \quad [\%] \tag{14}$$

where k_p is the value of average rate of exchange during the whole observed period



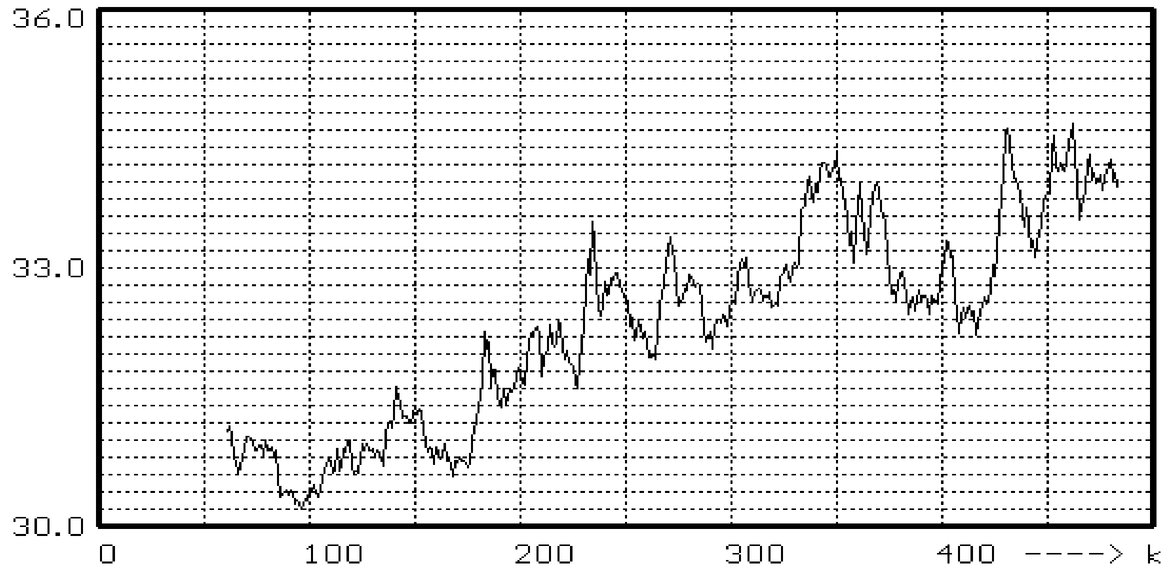
Obr. 2. Vývoj relatívneho centrovaného kurzu USD/SK
Fig. 2 Development of relative centred rate of exchange USD/SK



Obr. 3. Nastavovanie prvkov matice A(k)
Fig. 3 Tuning of elements of matrix A(k).

Na obr. 4 je znázornený predpovedaný vývoj kurzu USD/SK s predikčným intervalom 10 dní. Na počiatočné nastavenie bolo využitých prvých 50 členov časového radu. Navrhovaný model predpovedá hodnotu relatívneho centrovaného kurzu o 10 dní . Z uvedeného vyplýva, že prvá predpovedaná hodnota kurzu je v bode 60. Celý súbor obsahuje 473 členov postupnosti, preto posledná predpovedaná hodnota je v bode 483.

Fig.4 shows the predicted development of the rate of exchange USD/SK with a predicted interval of ten days. For the first tuning the first fifty elements of time series were used. The designed model predicts the value of the relative centred rate of exchange after ten days. As mentioned before, we see that the first predicted value of the rate of exchange is in point 60. The whole file contains 473 elements of sequence. Subsequently of it the last predicted value is in point 483.



Obr. 4. Prognóza vývoja centrovaného relatívneho kurzu USD/SK
Fig. 4 Forecast of development of relative rate of exchange USD/SK.

Na zhodnotenie úspešnosti modelu bola zavedená priemerná relatívna chyba prognózy:

$$d = \frac{1}{N-M} \sum_{i=M}^{N} \frac{|y_r(i) - y(i)|}{k_p}, \qquad (15)$$

kde M je počet členov postupnosti (dní) na nastavenie parametrov modelu, N je počet všetkých členov postupnosti, k_p priemerný kurz $y(i)$ prognóza pre i-ty deň a $y_r(i)$ skutočná hodnota. Na obr. 5 je uvedená závislosť priemernej relatívnej chyby prognózy od dĺžky intervalu prognózovania. Krivky 1 až 8 znázorňujú priebeh chyby pre modely s rôznym počtom prvkov matice $A(k)$. Krivka (1) odpovedá modelu s piatimi prvkami matice $A(k)$. Počet prvkov postupne narastá až krivka (8) odpovedá modelu s 19 prvkami.

3. Záver

V súčasnosti sa stretávame s mimoriadne rýchlym rozvojom informačných technológií, ktoré nám sprístupňujú aktuálne informácie z najrôznejších oblastí ľudskej činnosti v dosiaľ nebývalom

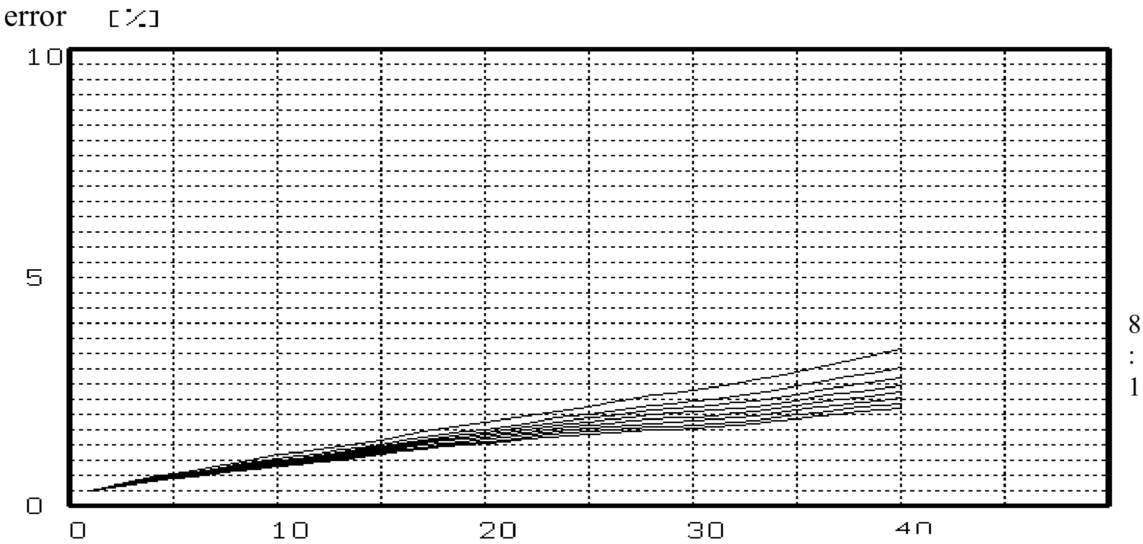
For the evaluation of the success of the model, a relative error of forecast was created:

$$d = \frac{1}{N-M} \sum_{i=M}^{N} \frac{|y_r(i) - y(i)|}{k_p}, \qquad (15)$$

where M is the number of elements of sequence (days) for the tuning of the parameters of the model, N is the number of all elements of the sequence, kp is the average rate of exchange $y(i)$ forecasting for i-day and $y_r(i)$ is the real value. In Fig. 5 the mentioned dependency of the average relative error of forecast on the length of forecasting interval is shown. Lines 1-8 show the value of error for the models with various numbers of elements of matrix $A(k)$. Line (1) corresponds with the model with 5 elements of the matrix $A(k)$. The number of elements of the matrix increases and line 8 corresponds with the model with 19 elements.

3. Conclusion

Today, information technologies are developing fast which makes possible the use of information from various areas of



Obr. 5. Závislosť priemernej relatívnej chyby od dĺžky intervalu prognózy
Fig.5 Dependency of average relative error on the length of interval of forecast.

rozsahu. Je preto potrebné zaoberať sa aj novými, netradičnými spôsobmi ich spracovania, s maximálnym využívaním moderných technických prostriedkov. V predkladanom článku je popísaný istý pokus o aplikáciu teoretických metód a postupov, používaných pri analýze dynamických systémov do oblasti modelovania ekonomických systémov a simulácie procesov so zameraním na riešenie úloh prognózy. Pretože rozsah príspevku je príliš obmedzený, sú v ňom uvedené len základné teoretické východiská a stručný popis experimentu - predpoveď vývoja kurzu USD/SK. V príspevku je zámerne poukázané na spojitosť medzi používanými ekonomickými metódami (regresné modely) a metódami využívanými v oblasti analýzy dynamických systémov.

Literatúra

[1] KOTEK, Z. a kol.: Adaptívní a učíci se systémy, SNTL 1980
[2] MIČEKOVÁ, M.: Využitie teórie adaptívnych systémov v prognózovaní ekonomických procesov, KDP, Žilina, 1998
[3] OGATA, K.: Discrete time control systems, Prentice Hall, New Jersey, 1987

Recenzenti: P. Ďuriník, J. Mikolaj

human activities. So it is necessary to be interested in original methods of processing information with maximal employment of modern technical equipment. This article describes the experiment of applications of theoretical methods used in analysing dynamic systems in the area of modelling of economic systems and simulations of processes. Because the length of the article is limited, it described only the basic theoretical points and brief descriptions of the experiment-forecast of the development of the rate of exchange USD/SK. This article showed the relationship between the use of economic methods (regress models) and analytical methods of a dynamic system.

References

[1] KOTEK, Z. a kol.: Adaptívní a učíci se systémy, SNTL 1980
[2] MIČEKOVÁ, M.: Využitie teórie adaptívnych systémov v prognózovaní ekonomických procesov, KDP, Žilina, 1998
[3] OGATA, K.: Discrete time control systems, Prentice Hall, New Jersey, 1987

Reviewed by: P. Ďuriník, J. Mikolaj