Robert Tenzer *

STRUČNÝ PREHĽAD TEÓRIE VÝŠOK

A BRIEF OVERVIEW TO THEORY OF HEIGHTS

V minulosti bolo v rôznych častiach sveta formulovaných a prakticky použitých mnoho typov výškových systémov. V súčasnosti sú prevažne používané ortometrické a normálne výšky. Ortometrické výšky sú prirodzené výšky nad hladinou mora, teda nad geoidom. Definícia ortometrických výšok vyžaduje aspoň teoretickú znalosť rozloženia hustoty topografických más medzi zemským povrchom a geoidom. Z tohto dôvodu Molodensky v roku 1945 sformuloval teóriu normálnych výšok založenú na princípe, že výšky môžu byť počítané bez hypotézy o rozložení hustoty topografickej hmoty. Tento článok sa zaoberá teoretickými aspektmi definície výšok.

In various parts of the world many kinds of height systems have been formulated and practically used in the past. Nowadays, orthometric heights and normal heights are widely used. The orthometric heights are the natural heights above sea level, that is, above the geoid. The definition of the orthometric heights required the knowledge of the topographical masses density distribution between the Earth's surface and the geoid, at least theoretically. For this reason Molodensky in 1945 formed a theory of normal heights based on the principle that the heights can be evaluated without any hypothesis about the density distribution of topographical masses. Theoretical aspects of the definition of heights are described in this paper.

1. Úvod

V klasickom zmysle, podľa Gaussa a Listinga, je geoid definovaný ako ekvipotenciálna (hladinová) plocha, ktorej geopotenciálna hodnota je W_o.

C. F. Gauss (1828) stanovil ako hraničnú plochu Zeme hladinovú plochu [4]. Neskôr F. W. Bessel (1837) definoval hraničný povrch Zeme ako ekvipotenciálnu plochu aproximujúcu strednú pokojnú hladinu oceánov [2]. Nakoniec J. B. Listing (1873) nazval tento povrch geoidom [7]. Geoid je tak základnou ekvipotenciálnou plochou použitou na definíciu prirodzených ortometrických výšok.

Na definovanie skutočnej hodnoty ortometrickej výšky je ale potrebné poznať rozloženie hustoty topografických más medzi geoidom a zemským povrchom.

F. R. Helmert (1890) definoval ortometrické výšky na základe hypotézy o rozložení hustoty [6] pričom predpokladal konštantnú topografickú hustotu $\rho_o = 2{,}67$ g.cm^{-3}.

M. S. Molodensky (1945) sformuloval teóriu normálnych výšok bez hypotézy o rozložení hustoty hmoty topografických más [9].

2. Geopotenciálna kóta

H. Bruns (1878) opísal geometriu tiažového poľa Zeme vzťahom [1]

$$dW(H, \Omega) = -g(H, \Omega)\, dH(\Omega) = const., \tag{2.1}$$

kde zemepisné súradnice φ, λ sú reprezentované uhlom $\Omega = (\varphi, \lambda)$, H je výška určená niveláciou.

1. Introduction

In a classical sense of Gauss and Listing, the geoid is defined as an equipotential (level) surface whose geopotential value is W_o.

First, C. F. Gauss (1828) stipulated that the Earth's boundary surface should be a level surface [4]. Later, F. W. Bessel (1837) defined the Earth's boundary surface as the equipotential surface approximating the mean calm ocean levels [2]. Finally, J. B. Listing (1873) named this surface "geoid" [7]. The geoid is then basic equipotential surface for the definition of the natural orthometric heights.

To define an actual value of the orthometric height, the distribution of the density of the topographical masses between the geoid and the Earth's surface has to be known.

F. R. Helmert (1890) defined the orthometric height based on a hypo- thesis of density distribution [6]. The constant topographical density $\rho_o = 2.67$ g.cm^{-3} is assumed in this hypothesis.

M. S. Molodensky (1945) formed theory of the normal heights without using any hypothesis about density distribution of topographical masses [9].

2. Geopotential number

H. Bruns (1878) described the geometry of the Earth's gravity field by the equation [1]

$$dW(H, \Omega) = -g(H, \Omega)\, dH(\Omega) = const., \tag{2.1}$$

where geographic coordinates φ, λ are represented by solid angle $\Omega = (\varphi, \lambda)$, and H is a height obtained from the levelling.

* **Robert Tenzer**
University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, Fredericton, N.B., Canada

Brunsov vzťah (2.1) hovorí, že konštantný diferenciálny rozdiel $dW(r, \Omega)$ potenciálov dvoch blízkych hladinových plôch je rovný zápornej hodnote súčinu tiažového zrýchlenia $g(H, \Omega)$ a vzdialenosti $dH(\Omega)$ pozdĺž ťažnice medzi oboma hladinovými plochami.

Geopotenciálna kóta $C(H, \Omega)$ je definovaná aplikáciou Brunsovho vzťahu na rozdiel tiažového potenciálu na geoide a tiažového potenciálu $W(H, \Omega)$ na zemskom povrchu (Heiskanen a Moritz, 1967)

$$C(H, \Omega) = W_o - W(H, \Omega) = \int_0^{H(\Omega)} g(h, \Omega)\, dH(\Omega). \quad (2.2)$$

Bruns' formula (2.1) states that the constant difference $dW(r, \Omega)$ of potentials of two closed equipotential surfaces is equal to the negative product of the gravity acceleration $g(H, \Omega)$ and the distance $dH(\Omega)$ along the plumb line between these equipotential surfaces.

The geopotential number $C(H, \Omega)$ is defined by applying Bruns' formula to the difference between the gravity potential W_o on the geoid and the gravity potential $W(H, \Omega)$ on the Earth's surface [5]

$$C(H, \Omega) = W_o - W(H, \Omega) = \int_0^{H(\Omega)} g(h, \Omega)\, dH(\Omega). \quad (2.2)$$

3. Ortometrická výška

Skutočná ortometrická výška $H^O(\Omega)$ je definovaná ako dĺžka ťažnice medzi geoidom a zemským povrchom (obr. 1). Podľa Brunsovho vzťahu je rozdiel dvoch potenciálov konštantný a nezávislý od integračnej cesty.

Vzhľadomna to je integrácia pozdĺž ťažnice medzi geoidom a zemským povrchom rovná integrácii na zemskom povrchu od nulového výškového bodu $O(H = 0, \Omega')$ na geoide (maregraf) do bodu $P(H, \Omega')$,

3. Orthometric height

The actual orthometric height $H^O(\Omega)$ is defined as a length of the plumb line between the geoid and the Earth's surface (Fig.1). According to Bruns' formula, the difference between two potentials is constant and independent of a path of integration. Consequently, the integration along the plumb line between the geoid and the Earth's surface is equal to the integration over the Earth's surface from the zero-height point $O(H = 0, \Omega')$ on the geoid (gauge station) to the point $P(H, \Omega')$

$$\int_{O(H=0,\,\Omega')}^{P(H,\,\Omega')} g(H, \Omega')\, dH(\Omega') = \int_0^{H(\Omega)} g(H, \Omega)\, dH(\Omega) = const. \quad (3.1)$$

Podľa teorémy o strednej hodnote integrálu nadobudne integrál na pravej strane rovnice (3.1) tvar

According to the theorem of a mean integral value, the integral on the right-hand side of the equation (3.1) takes the following form

$$\int_0^{H(\Omega)} g(H, \Omega)\, dH(\Omega) = \bar{g}(H, \Omega) \int_0^{H(\Omega)} dH(\Omega). \quad (3.2)$$

kde $\bar{g}(H, \Omega)$ je stredná hodnota tiaže pozdĺž ťažnice medzi geoidom a zemským povrchom.

Integrálny výraz

$$H^O(\Omega) = \int_0^{H(\Omega)} dH(\Omega), \quad (3.3)$$

rovný dĺžke ťažnice medzi geoidom a zemským povrchom, je potom skutočná ortometrická výška $H^O(\Omega)$.

Substitúciou rovníc (3.3) a (2.2) do rovnice (3.2) dostaneme základný vzťah na definíciu skutočnej ortometrickej výšky [5]

where $\bar{g}(H, \Omega)$ stands for the mean value of the gravity along the plumb line between the geoid and the Earth's surface.

The integral expression

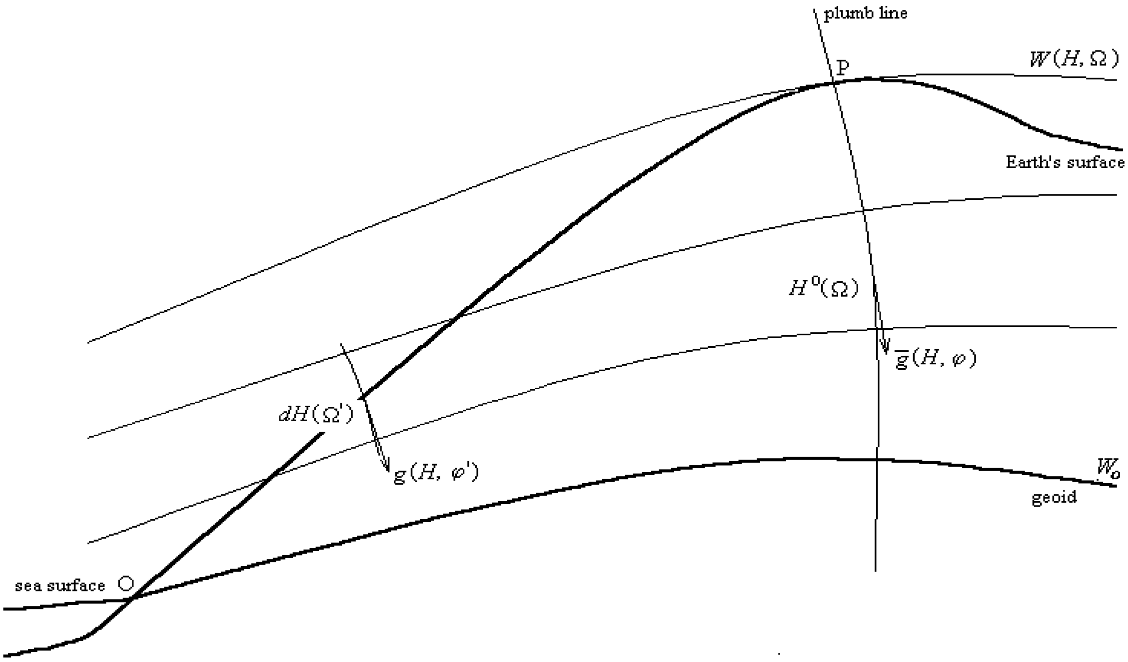
$$H^O(\Omega) = \int_0^{H(\Omega)} dH(\Omega), \quad (3.3)$$

equal to the length of the plumb line between the geoid and the Earth's surface, is then the actual orthometric height $H^O(\Omega)$. Substituting the equations (3.3) and (2.2) to the equation (3.2), we obtain a basic formula for the definition of the actual orthometric height [5]

$$H^O(\Omega) = \frac{1}{\bar{g}(H, \Omega)} \int_{O(H=0,\,\Omega')}^{P(H,\,\Omega')} g(H, \Omega')\, dH(\Omega') = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{g}(H, \Omega)}. \quad (3.4)$$

Na prevod výsledkov nivelácie $C(H, \Omega') = \int_{O(H=0,\,\Omega')}^{P(H,\,\Omega')} g(H, \Omega')\, dH(\Omega')$ na ortometrické výšky $H^O(\Omega)$ potrebujeme poznať hodnotu tiaže $\bar{g}(H, \Omega)$ pod zemským povrchom. Keďže hodnoty $\bar{g}(H, \Omega)$ nemôžu byť merané, musia byť počítané z tiažových $g(H, \Omega)$ údajov na zemskom povrchu a redukované podľa hypotézy o rozložení hustoty topografickej hmoty.

To convert the result of levelling $C(H, \Omega') = \int_{O(H=0,\,\Omega')}^{P(H,\,\Omega')} g(H, \Omega')\, dH(\Omega')$ into the orthometric height $H^O(\Omega)$, we need to know the value $\bar{g}(H, \Omega)$ of the gravity inside the Earth. Since $\bar{g}(H, \Omega)$ can not be measured, it has to be computed from the surface gravity. This is done by reducing the observed value $g(H, \Omega)$ of gravity according to the hypothesis of the topographical density distribution.



Obr. 1. Ortometrická výška a geopotenciálna kóta
Fig. 1. The orthometric height and the geopotential number

F. R. Helmert (1890) použil na definíciu ortometrických výšok Poincaré-Pray tiažový gradient [6]. Podľa tohto postupu hodnota tiaže potrebná na určenie výšky je získaná z meraného tiažového zrýchlenia na zemskom povrchu redukovaného do stredného bodu medzi geoidom a zemským povrchom.

Tiažová redukcia na stredný bod je počítaná tak, že terén je nahradený nekonečnou Bouguerovou doskou o konštantnej hustote $\rho_o = 2{,}67$ g.cm^{-3}.

Helmertova ortometrická výška $H^O(\Omega)$ je definovaná ako [10]

Helmert (1890) used the Poincaré-Prey's gravity gradient for the definition of the orthometric height [6]. According to this approach, the gravity value needed for the evaluation of the height is obtained from the observed gravity at the Earth's surface reduced to the mid-point between the Earth's surface and the geoid. The reduction of gravity to the mid-point is computed so that the terrain is replaced by an infinite Bouguer plate of constant density $\rho_o = 2.67$ g.cm^{-3}.

Helmert's orthometric height $H^O(\Omega)$ is defined as [10]

$$H^O(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{g}(H/2, \Omega)} = \frac{1}{\bar{g}(H/2, \Omega)} \int_{O(H = 0, \Omega')}^{P(H, \Omega')} g(H, \Omega')\, dH(\Omega'). \tag{3.5}$$

Stredná hodnota tiaže [5]

Helmert's gravity [5]

$$\bar{g}(H/2, \Omega) = g(H, \Omega') - \frac{1}{2}\frac{\partial g(H, \Omega)}{\partial H(\Omega)} H^O(\Omega) \cong \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \gamma (H, \varphi)}{\partial H(\Omega)} + 4\pi G\rho_o\right] H^O(\Omega), \tag{3.6}$$

je definovaná aplikáciou Poincaré-Prey tiažového gradientu vyjadreného v hranatých zátvorkách.

Podľa tejto teórie je vertikálny tiažový gradient uvažovaný ako konštantný pozdĺž ťažnice medzi geoidom a zemským povrchom $\bar{g}(H/2, \Omega)$ takže je počítaný priamo pre stredný bod na ťažnici $H^O(\Omega)/2$.

Z Poissonovej rovnice [5]

is defined by using Poincaré-Prey's gravity gradient, which is given by the expression in the square brackets.

According to this theory the vertical gradient of gravity is considered to be constant along the plumb line between the geoid and the Earth's surface. Since the gravity gradient is considered to be constant, $\bar{g}(H/2, \Omega)$ is evaluated directly for the mid-point of the plumb line $H^O(\Omega)$.

From Poisson's equation [5]

$$\Delta W(x, y, z) = \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial z^2} = 4\pi G\rho_o + 2\omega^2, \tag{3.7}$$

a z výrazu pre stredné zakrivenie hladinovej plochy $J(H, \Omega)$,

and from the expression for the mean curvature $J(H, \Omega)$ of the equipotential surface

$$J(H, \Omega) = \frac{1}{2g(H, \Omega)} \left[\frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial z^2} \right], \tag{3.8}$$

môžeme získať Brunsov vzťah pre tiažový gradient

we can obtain Bruns' formula for the gravity gradient

$$\frac{\partial g(H, \Omega)}{\partial H(\Omega)} = -2g(H, \Omega)\, J(H, \Omega) + 4\pi G\rho_o - 2\omega^2 . \tag{3.9}$$

kde ω je stredná hodnota uhlovej rýchlosti rotácie Zeme, G je Newtonova gravitačná konštanta, ρ_o je stredná hodnota hustoty topografických más medzi geoidom a zemským povrchom, a $\partial^2 W(x, y, z)/\partial x^2$, $\partial^2 W(x, y, z)/\partial y^2$, $\partial^2 W(x, y, z)/\partial z^2$ sú druhé parciálne derivácie tiažového potenciálu v lokálnom astronomickom súradnicovom systéme $x, y, z,$ kde os z je totožná s vonkajšou normálou lokálnej hladinovej plochy.

Vertikálny gradient $\partial \gamma (H, \varphi)/\partial H(\Omega)$ normálneho tiažového zrýchlenia generovaného stredným zemským elipsoidom je

Here ω is the mean value of the angular velocity of the Earth's rotation, G is Newton's gravitational constant, ρ_o is the mean density of the topographical masses between the geoid and the Earth's surface and $\partial^2 W(x, y, z)/\partial x^2$, $\partial^2 W(x, y, z)/\partial y^2$, $\partial^2 W(x, y, z)/\partial z^2$ are second partial derivatives of the gravity potential in the local astronomical co-ordinate system $x, y, z,$ where the z-axis coincides with the outer normal of the local equipotential surface.

The vertical gradient $\partial \gamma (H, \varphi)/\partial H(\Omega)$ of normal gravity generated by the mean ellipsoid of the Earth is

$$\forall\, H(\Omega) > 0: \quad \frac{\partial \gamma (H, \varphi)}{\partial H(\Omega)} - 2\gamma(H, \varphi)\, J_o(\varphi) - 2\omega^2 , \tag{3.10}$$

kde $J_o(\varphi)$ je stredné zakrivenie elipsoidu dané vzťahom

$$J_o(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M(\varphi)} + \frac{1}{N(\varphi)}\right). \tag{3.11}$$

V tomto vzťahu sú $M(\varphi)$, $N(\varphi)$ meridiánové polomery krivosti stredného zemského elipsoidu [3]

with the mean curvature $J_o(\varphi)$ of the ellipsoid given by

$$J_o(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M(\varphi)} + \frac{1}{N(\varphi)}\right). \tag{3.11}$$

Here $M(\varphi)$, $N(\varphi)$ are the principal radii of curvature of the mean ellipsoid of the Earth [3]

$$\forall\, \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle: \quad M(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \quad N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{3.12}$$

je φ geodetická šírka, a, b sú poloosi referenčného elipsoidu a $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ je druhá mocnina prvej numerickej excentricity elipsoidu.

Poincaré-Preyova teória vertikálneho gradientu predpokladá s do-statočnou presnosťou [10]

$$g(h, \Omega)\, J(H, \varphi) \cong \gamma(H, \varphi)\, J_o(\varphi). \tag{3.13}$$

Poincaré-Preyov vertikálny tiažový gradient môže byť potom prepísaný do nasledovného tvaru

where φ is the geodetic latitude, a, b are the semiaxes of the ellipsoid, and $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ is the square of the first numerical eccentricity of the ellipsoid.

The Poincaré-Prey's theory of the vertical gradient of the gravity assumes, with sufficient accuracy, the following [10]

$$g(h, \Omega)\, J(H, \varphi) \cong \gamma(H, \varphi)\, J_o(\varphi). \tag{3.13}$$

The Poincaré-Prey's vertical gradient of gravity is then

$$\frac{\partial g(H, \varphi)}{\partial H(\Omega)} \cong \frac{\partial \gamma (H, \varphi)}{\partial H(\Omega)} + 4\pi G\rho_o = -\, 2\gamma(H, \varphi)\, J_o(\varphi) - 2\omega^2 + 4\pi G\rho_o , \tag{3.14}$$

a Helmertova ortometrická výška nadobudne tvar

and the Helmert orthometric height takes the following form

$$H^o(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{g(H, \Omega) + \gamma(H, \varphi)\, J_o(\varphi)\, H^o(\Omega) + \omega^2 H^o(\Omega) - 2\pi G\rho \mathrm{H}^o(\Omega)} . \tag{3.15}$$

4. Normálna ortometrická výška

Číselná hodnota geopotenciálnej kóty $C(H, \Omega')$ je výsledkom nivelácie kombinovanej s tiažovými meraniami.

Integrál v rovnici (2.2) môže byť nahradený konečným počtom výškových rozdielov $\Delta H(\Omega_i')$ z nivelácie a konečným počtom tiažových údajov $g(H, \Omega_i')$ z tiažových meraní realizovaných v nivelačnom ťahu,

4. Normal orthometric height

The numerical value of the geopotential number $C(H, \Omega')$ is a result of levelling combined with gravity measurements.

The integral in the equation (2.2) can be replaced by finite elements of the height differences $\Delta H(\Omega_i')$ from levelling and by finite discrete gravity values $g(H, \Omega_i')$ from gravity measurements realised in a levelling line,

$$C(H, \Omega') = \int_{O(H=0,\,\Omega')}^{P(H,\,\Omega')} g(H, \Omega')\, dH(\Omega) = \sum_i g(H, \Omega'_i)\, \Delta H(\Omega'_i)\,. \tag{4.1}$$

Do tridsiatych rokov 20. storočia boli tiažové merania náročné a málo presné pretože k dispozícii boli iba kyvadlové gravimetre. Za týchto okolností boli v praxi používané normálne ortometrické výšky.

V definícii normálnej ortometrickej výšky $H^{NO}(\Omega)$ sú skutočné hodnoty tiaže $g(H, \Omega')$ na zemskom povrchu nahradené teoretickými hodnotami $\gamma(H, \varphi')$ normálneho tiažového zrýchlenia, takže platí

Until the 30-ies of the 20th century, the gravity measurements had been difficult and inaccurate because only pendulum gravimeter equipment were available. Under this circumstances the normal orthometric heights were used in practice.

The actual gravity values $g(H, \Omega')$ on the Earth's surface are replaced by theoretic values $\gamma(H, \varphi')$ of the normal gravity in the definition of the normal orthometric height $H^{NO}(\Omega)$, which is then given by the following formula

$$H^{NO}(\Omega) = \frac{1}{\bar{\gamma}(H, \varphi)} \int_{O(H=0,\,\Omega')}^{P(H,\,\Omega')} \gamma(H, \varphi')\, dH(\Omega')\,. \tag{4.2}$$

5. Dynamická výška

Dynamická výška $H^D(\Omega)$ je definovaná vzťahom

$$H^D(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\gamma_o(\varphi)}\,, \tag{5.1}$$

kde $\gamma_o(\varphi)$ je normálne tiažové zrýchlenie na rotačnom hladinovom elipsoide pre ľubovoľnú štandardnú zemepisnú šírku, obyčajne $\varphi = \pi/4$.

Dynamická výška sa odlišuje od geopotenciálnej kóty len v rozmere a v jednotkách. Delenie geopotenciálnej kóty konštantnou hodnotou $\gamma_o(\varphi)$ iba prevádza geopotenciálnu kótu na dĺžkovú jednotku.

5. Dynamic height

The dynamic height $H^D(\Omega)$ is defined as

$$H^D(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\gamma_o(\varphi)}\,, \tag{5.1}$$

where $\gamma_o(\varphi)$ is the normal gravity on the level rotation ellipsoid for an arbitrary standard latitude, usually $\varphi = \pi/4$.

Obviously, the dynamic height differs from the geopotential number only in a scale and in a unit. The division of the geopotential number by the constant value $\gamma_o(\varphi)$ just converts the geopotential number into a length.

6. Normálna výška

Určenie výšok z nivelácie a tiažových meraní bez hypotézy o rozložení hustoty topografických más je základným princípom Molodenského teórie normálnych výšok $H^N(\Omega)$, [9].

Nahradením strednej hodnoty $\bar{g}(H, \Omega)$ tiažového zrýchlenia strednou hodnotou normálneho tiažového zrýchlenia $\bar{\gamma}(H, \varphi)$ pozdĺž normály medzi referenčným elipsoidom a teluroidom (obr. 2) získame vzťah na definíciu normálnej výšky $H^N(\Omega)$ ako

$$H^N(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{\gamma}(H, \varphi)}\,, \tag{6.1}$$

Stredná hodnota normálneho tiažového zrýchlenia $\bar{\gamma}(H, \varphi)$ pozdĺž ťažnice medzi teluroidom a referenčným elipsoidom môže byť vyjadrená Taylorovým rozvojom

6. Normal height

The determination of the heights from levelling and gravity measurements without any hypothesis about a density distribution of topographical masses is fundamental principle of Molodensky's theory of the normal height $H^N(\Omega)$, [9].

Replacing the mean value $\bar{g}(H, \Omega)$ of the gravity by the mean value of the normal gravity $\bar{\gamma}(H, \varphi)$ along the normal between the reference ellipsoid and the telluriod (Fig.2), we obtain the formula for the definition of the normal height $H^N(\Omega)$ as

$$H^N(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{\gamma}(H, \varphi)}\,, \tag{6.1}$$

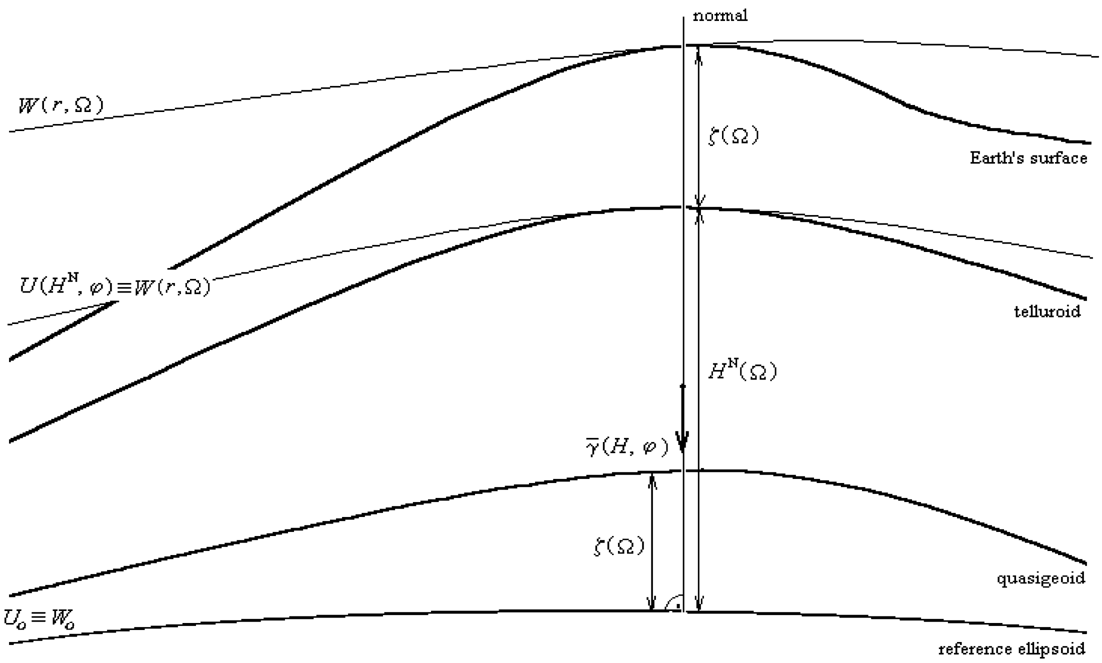
The mean value of the normal gravity $\bar{\gamma}(H, \varphi)$ is referred on the mid-point of the normal between the telluriod and the reference ellipsoid, so it can be expressed by Taylor series in the following form

$$\bar{\gamma}(H, \varphi) = \gamma(H, \varphi) - \frac{1}{2}\frac{\partial\, \gamma(H, \varphi)}{2\,\partial\, H(\Omega)} H^N(\Omega) + \ldots =$$

$$= \gamma_o(\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial\, \gamma(H, \varphi)}{2\,\partial\, H(\Omega)}\bigg|_{H(\Omega)=0} H^N(\Omega) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \gamma(H, \varphi)}{2\,\partial\, H(\Omega)^2}\bigg|_{H(\Omega)=0} [H^N(\Omega)]^2 + \ldots . \tag{6.2}$$

Prvá derivácia $\partial\, \gamma/\partial\, H$ daná vzťahom (3.10) môže byť vyjadrená v tvare [5]

The first derivative $\partial\, \gamma/\partial\, H$ given by equation (3.10) can be rewritten as [5]



Obr. 2. Molodenského teória normálnych výšok
Fig. 2. Molodensky's theory of the normal height.

$$\frac{\partial\, \gamma(H,\, \varphi)}{2\, \partial\, H(\Omega)}\Bigg|_{H(\Omega)=0} = -\frac{2\gamma_o(\varphi)}{a}\left(1 + f + \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} - 2f \sin^2 \varphi\right). \tag{6.3}$$

Druhá derivácia $\partial\, \gamma^2 / \partial\, H^2$ môže byť vyjadrená v sférickej aproximácii

$$\frac{\partial^2\, \gamma(H,\, \varphi)}{2\, \partial\, H(\Omega)^2}\Bigg|_{H(\Omega)=0} = \frac{6\gamma_o(\varphi)}{a^2}. \tag{6.4}$$

Substitúciou rovníc (6.3) a (6.4) do (6.2) dostaneme vzťah na výpočet normálneho tiažového zrýchlenia $\bar{\gamma}(H, \varphi)$ v nasledovnom tvare

The second derivative $\partial\, \gamma^2 / \partial\, H^2$ can be described in the spherical approximation

$$\frac{\partial^2\, \gamma(H,\, \varphi)}{2\, \partial\, H(\Omega)^2}\Bigg|_{H(\Omega)=0} = \frac{6\gamma_o(\varphi)}{a^2}. \tag{6.4}$$

Substituting the equations (6.3) and (6.4) to the equation (6.2), we obtain the formula for the computation of the normal gravity $\bar{\gamma}(H, \varphi)$ in the following form

$$\bar{\gamma}(H,\, \varphi) = \gamma_o(\varphi)\left[1 - \left(1 + f + \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} - 2f \sin^2 \varphi\right)\frac{H^N(\Omega)}{a} + \left(\frac{H^N(\Omega)}{a}\right)^2\right], \tag{6.5}$$

kde GM je geocentrická gravitačná konštanta a f je sploštenie referenčného elipsoidu.

Teluroid je povrch, ktorého normálny tiažový potenciál $U(H^N, \varphi)$ je rovný tiažovému potenciálu na zemskom povrchu. Kvázigeoid (nie je ekvipotenciálnou plochou) je daný výškovými anomáliami $\varsigma(\Omega)$ vztiahnutými k referenčnému elipsoidu.

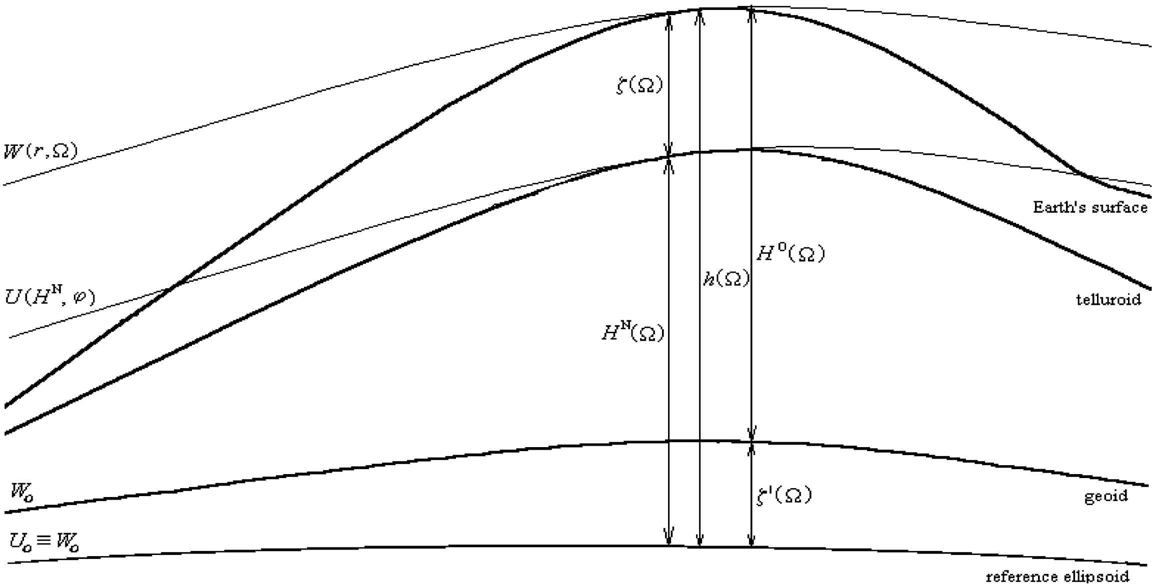
Poznámka: J. Vignal [12] navrhol podobný výškový systém, kde stredná hodnota normálneho tiažového zrýchlenia je počítaná z normálneho tiažového zrýchlenia $\gamma_o(\varphi)$ na hladinovom rotačnom elipsoide v zmysle aproximácie vertikálneho gradientu normálneho tiažového zrýchlenia, pričom v tejto teórii je použitá iba prvá parciálna derivácia Taylorovho rozvoja (6.2)

where GM is the geocentric gravitational constant, and f is the flattening of the reference ellipsoid.

The surface, whose normal gravity potential $U(H^N, \varphi)$ is equal to the gravity potential on the Earth's surface is the telluroid. The quasigeoid (which is not equipotential surface) is given by heights anomalies $\varsigma(\Omega)$ referred on the reference ellipsoid.

Note: Vignal [12] proposed a similar system of heights, whereby the mean value of the normal gravity is evaluated from the normal gravity $\gamma_o(\varphi)$ on the level rotation ellipsoid by means of approximate vertical gradient of normal gravity. In this theory only the first partial derivative of the Taylor series (6.2) is used in the form

$$\bar{\gamma}(H,\, \varphi) = \gamma_o(\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial\, \gamma(H,\, \varphi)}{\partial\, H(\Omega)}\Bigg|_{H(\Omega)=0} H^N(\Omega) = \gamma_o(\varphi) - \frac{\gamma_o(\varphi)}{a}\left(1 + \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} - 2f \sin^2 \varphi\right) H^N(\Omega). \tag{6.6}$$



Obr. 3. Elipsoidická výška
Fig. 3. The ellipsoidal height

Na definíciu vzťahu medzi Molodenského normálnou výškou a Helmertovou ortometrickou výškou vyjadríme elipsoidickú výšku $h(\Omega)$ ako sumu normálnej výšky $H^N(\Omega)$ a výškovej anomálie $\varsigma(\Omega)$, podľa Molodenského teórie a ako sumu ortometrickej výšky $H^O(\Omega)$ a geoidickej výšky $\varsigma'(\Omega)$, (obr. 3)

$$h(\Omega) = H^N(\Omega) + \varsigma(\Omega) = H^O(\Omega) + \varsigma'(\Omega). \quad (6.7)$$

Podľa W. H. Heiskanena a H. Moritza (1967) je rozdiel $\delta H(\Omega)$ medzi normálnou a ortometrickou výškou s dostatočnou presnosťou rovný [5]

To define relation between the Molodensky's normal height and Helmert's orthometric height, we define the ellipsoidal height $h(\Omega)$ as a sum of the normal height $H^N(\Omega)$ and height anomaly $\varsigma(\Omega)$ according to Molodensky's theory, and a sum of the orthometric height $H^O(\Omega)$ and geoidal height $\varsigma'(\Omega)$, respectively (Fig. 3)

$$h(\Omega) = H^N(\Omega) + \varsigma(\Omega) = H^O(\Omega) + \varsigma'(\Omega). \quad (6.7)$$

According to Heiskanen and Moritz, (1967), the difference between the normal and orthometric height $\delta H(\Omega)$ is, with sufficient accuracy, equal to [5]

$$\delta H(\Omega) = H^N(\Omega) - H^O(\Omega) = \frac{C(H,\Omega)}{\bar{g}(H,\Omega)}\left[\frac{\bar{g}(H,\Omega) - \bar{\gamma}(H,\varphi)}{\bar{\gamma}(H,\varphi)}\right] = H^O(\Omega)\,\frac{\bar{g}(H,\Omega) - \bar{\gamma}(H,\varphi)}{\bar{\gamma}(H,\varphi)}. \quad (6.8)$$

Výraz $\bar{g}(H,\Omega) - \bar{\gamma}(H,\varphi)$ je približne rovný jednoduchej Bouguerovej tiažovej anomálii $\Delta g^{SB}(H,\Omega)$ [8],

The term $\bar{g}(H,\Omega) - \bar{\gamma}(H,\varphi)$ is approximately equal to the simple Bouguer gravity anomaly $\Delta g^{SB}(H,\Omega)$ [8],

$$\bar{g}(H,\Omega) - \bar{\gamma}(H,\varphi) = g(H,\Omega) - \frac{1}{2}\frac{\partial\,\gamma(H,\varphi)}{\partial\,H(\Omega)}H^O(\Omega) - 2\pi G\rho_o H^O(\Omega) - \gamma(H,\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial\,\gamma(H,\varphi)}{\partial\,H(\Omega)}H^N(\Omega) \cong$$

$$\cong g(H,\Omega) - \gamma(H,\varphi) - 2\pi G\rho_o H^O(\Omega) = \Delta g^{SB}(H,\Omega). \quad (6.9)$$

Uvažujúc, že $g(H,\Omega) \approx \gamma(H,\varphi)$, môžeme nakoniec vyjadriť korekciu ortometrickej výšky na normálnu výšku v nasledovnom tvare

Assuming $g(H,\Omega) \approx \gamma(H,\varphi)$, we can finally describe the correction of the orthometric height to normal height in the following form

$$\delta H(\Omega) = H^O(\Omega)\,\frac{\Delta g^{SB}(H,\Omega)}{\bar{\gamma}(H/2,\varphi)} \cong -2\pi G\rho_o H^O(\Omega)\,\frac{H^O(\Omega)}{\bar{\gamma}(H/2,\varphi)} \approx -2\pi G\rho_o\,\frac{[H^O(\Omega)]^2}{\gamma_o(\varphi)}. \quad (6.10)$$

7. Sumarizácia

Vzhľadom na geopotenciálnu kótu $C(H, \Omega')$ môžeme vyjadriť rozdielne typy výšok v prehľadnej forme:

– ortometrická výška: $$H^O(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{g}(H, \Omega)}, \qquad (7.1)$$

– normálna výška: $$H^N(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{\gamma}(H, \varphi)}, \qquad (7.2)$$

– dynamická výška: $$H^D(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\gamma_o(\varphi)}. \qquad (7.3)$$

Z tejto schémy vyplýva, že uvedené výškové systémy môžu byť získané delením geopotenciálnej kóty príslušnou hodnotou tiaže.

7. Summary

By means of the geopotential number (H, Ω'), we can describe different kinds of heights in a instructive form:

– orthometric height: $$H^O(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{g}(H, \Omega)}, \qquad (7.1)$$

– normal height: $$H^N(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\bar{\gamma}(H, \varphi)}, \qquad (7.2)$$

– dynamic height: $$H^D(\Omega) = \frac{C(H, \Omega')}{\gamma_o(\varphi)}. \qquad (7.3)$$

From this scheme it is clear that the above mentioned height systems can be obtained by dividing the geopotential number by the relevant value of the gravity.

Literatúra – References

[1] BRUNS, H., 1878: *Die Figur der Erde.* Berlin, Publ. Preuss. Geod. Inst.
[2] BESSEL, F. W., 1837: *Ueber den Einfluss der Undergelmaessigkeiten der Figur der Erde auf geodaetische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den Astronomischen Bestimmungen.* Astronomische Nachrichten, T.14., No. 269.
[3] BOMFORD, G., 1971: *Geodesy.* 3rd edition, Clarendon Press.
[4] GAUSS, C.F., 1828: *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector.* Vanderschoeck und Ruprecht, Göttingen.
[5] HEISKANEN, W. H., MORITZ, H., 1967: *Physical geodesy.* W.H. Freeman and Co., San Francisco.
[6] HELMERT, F. R., 1890: *Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen.* Veröff. Königl. Preuss. Geod. Inst., No.1.
[7] LISTING, J. B., 1873: *Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Groesse der Erde.* Nachrichten von der Koening. Göttingen VLG der Dietrichschen Buchhandlung.
[8] MARTINEC, Z., 1993: *Effect of lateral density variations of topographical masses in view of improving geoid model accuracy over Canada.* Final report of contract DSS No. 23244-2-4356, Geodetic Survey of Canada, Ottawa.
[9] MOLODENSKY, M. S., 1945: *Fundamental problems of Geodetic Gravimetry,* (in Russian), TRUDY Ts NIIGAIK 42, Geodezizdat, Moscow.
[10] VANICEK, P., KRAKIWSKY, E., 1986: *Geodesy, The concepts* (second edition), Elsevier Science B.V., Amsterdam.
[11] VANICEK, P., KLEUSBERG, A., MARTINEC, Z., SUN, W., ONG, P., NAJAFI, M., VAJDA, P., HARRIE, L., TOMASEK, P., HORST, B., 1995: *Compilation of a precise regional geoid.* Final report on research done for the Geodetic Survey Division. Fredericton.
[12] VIGNAL, J. and KUKKAMÄKI, T. J., 1954: *Comptes rendus des travaux de la section des nivellements de précision.* Bull. Géod., supplement to Vol. 34.