

## ANALÝZA MOBILNÉHO PROSTRIEDKU S DUÁLNYM POJAZDOM

### AN ANALYSIS OF A MOBILE VEHICLE WITH DUAL RUN

V príspevku je urobený teoretický rozbor rovinného pohybu modelu mobilného energetického prostriedku s prídavným zariadením. Ďalej sa zaoberá priestorovým riešením pohybu kolesa v duálnom pojazde a dynamikou jeho pohybu. Použitý postup umožňuje veľmi jednoducho a efektívne riešiť vplyv zvolených parametrov na vytýpané parametre stroja. V príspevku je poukázané na vplyv zmeny rýchlosti, hmotnosti, tuhosti a tlmenia na jeho pohyb. Je navrhnutý tiež skúšobný stav na zisťovanie základných vlastností duálneho pojazdu.

#### Úvod

V článku je analyzovaný trakčný mobilný prostriedok (malotraktor vo funkcii ťahača s prídavným zariadením - návesom) s duálnym pojazdom (obr. 1).

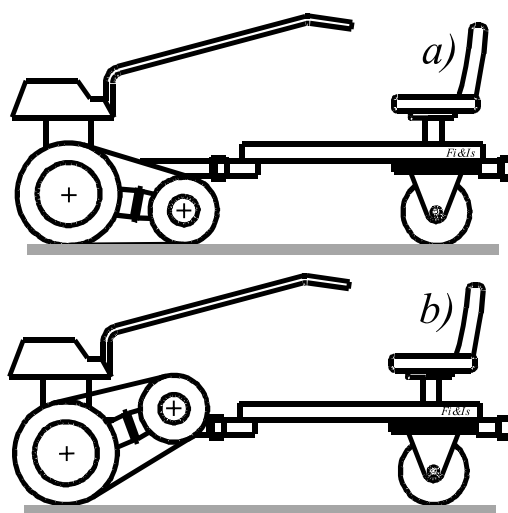
Duálny pojazd umožňuje činnosť ťahača v pásovom (obr. 1a), alebo kolesovom režime (obr. 1b); je teda kombináciou pásového a kolesového pojazdu. Zabezpečuje funkciu pásu, resp. funkciu kolesa, odvalujúceho sa po vnútornej strane pásu, ktorý je z vonkajšej strany v styku s podložkou. Preto pri určovaní odporu takto riešeného pojazdu je potrebné uvažovať aj s vnútorným valivým odporom kolesa po pásu. K riešeniu takéhoto prípadu je výhodné riešiť problém všeobecného prípadu odvalujúceho sa kolesa. Z dôvodu radiálneho kmitania elementov pneumatiky boli zobrať do úvahy aj straty energie, vznikajúce pri kmitaní.

Pre zvolený dynamický model (obr. 2) s rovnakými parametrami všetkých náprav boli odvodené príslušné pohybové rovnice [6]. Pre rôzne hodnoty parametrov náprav bol vytvorený dynamický model (obr. 6) riešený pomocou programu DYNAST [4]. Hlavným zámerom riešenia modelov je

Plane motion of a model vehicle with additional equipment is theoretically solved in this paper. The paper further deals with some questions concerning spatial motion of a dual-run wheel and consequences of such motion. The used method allows changing an arbitrary parameter in a very simple and effective way. The objective of the paper is to compare velocity, mass, stiffness and impact of damping on the vehicle motion. A test stand to measure properties of wheel-track-ground interactions was also designed.

#### Introduction

A traction mobile vehicle (a small tractor used as a trailer equipped with an additional device - a semi-trailer) with dual run is analyzed. (Fig. 1).



Obr. 1. Malotraktor s návesom s pásom a) nezdvihnutým, resp. b) zdvihnutým

Fig. 1. Small tractor-semi trailer and a track:  
a) non-lifted, b) lifted

Dual run enables the tractor to operate in a tracked regime (Fig. 1a), or in a wheel regime (Fig. 1b); it is, therefore, a combination of a tracked and wheel run. It provides an operation of the track or a wheel rolling along the inner side of the track that is in contact with ground on its outer side. When resistance of the run solved in this way is determined it is necessary to take into consideration internal rolling resistance of the wheel along the track. To solve this case it is advantageous to pay attention to a problem of a general case of a rolling wheel. Because of radial vibrations in the tire elements, energy losses resulting from vibrations were also taken into consideration.

For the chosen dynamic model (Fig. 2) featuring the same parameters for all axles, the corresponding equations of motion [6] were derived. A dynamic model (Fig. 6) was designed for different values of axle parameters and was solved by means of the program DYNAST [4]. The main objective of

\* Prof. Ing. Vladimír Hlavňa, PhD., Ing. Pavel Fitz, PhD., Ing. Rastislav Isteník, PhD.

University of Žilina, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Railway Vehicles, Engines and Lifting Equipment,

E-mail: hlavna@fstroj.utc.sk

analýza vplyvu niektorých parametrov malotraktora (hmotnosť motora, vplyvy tuhostí a tlmení pneumatík, vplyvy niektorých rozmerov a pod.) na jeho ergonomické vlastnosti, mechanické namáhanie atď.

Na overenie niektorých vlastností duálneho pojazdu malotraktora bolo navrhnuté príslušné zariadenie, umožňujúce merať jeho vlastnosti pri priamej jazde a pri zatáčaní.

### 1. Dynamický model sústavy s rovnakými parametrami náprav

Na obr. 2 je znázornený dynamický model ťahača s návěsom, kde sú za súradnice zvolené: zvislé posunutia  $x_1, x_2$  ťažísk  $T_t, T_n$  a natočenie  $\varphi_1$  ťahača. Systém má 3° voľnosti. Deformácie pružín  $\xi$ , ako aj súradnice  $x$  a  $\varphi$  boli merané vzhľadom na rovnovážnú polohu. Potenciálna energia tiaží bola zanedbaná.

Predpoklady:  $(x) \uparrow x, \dot{x}, \ddot{x}, F_x; (+) \downarrow \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}; \varphi_1 \geq \varphi_2; x_1 \geq x_2$

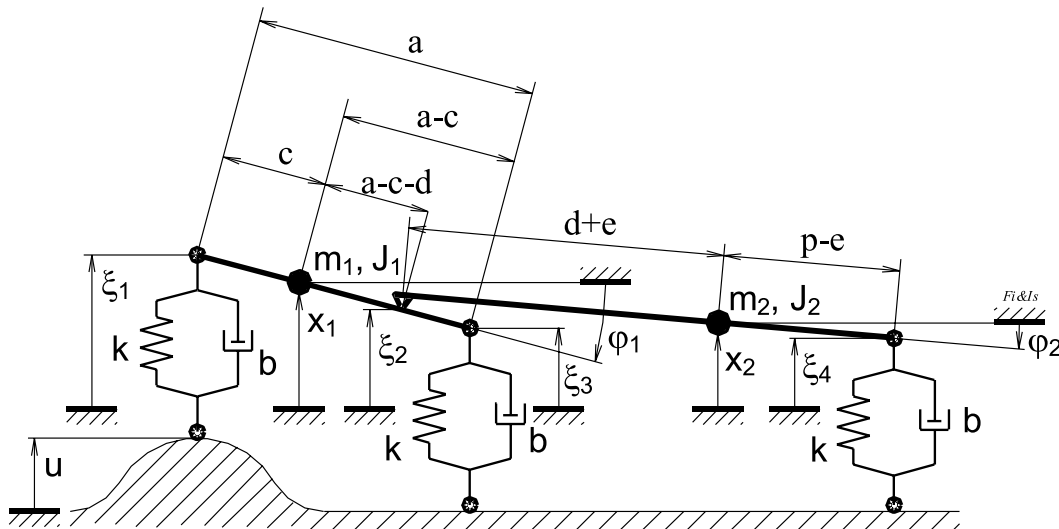
the model solution is an analysis of impact of some parameters of the tractor-semi trailer (engine mass, influences of the tire stiffness and damping, impact of some dimensions, etc.) on its ergonomic properties, mechanical stress, etc.

To verify some properties of the tractor-semi trailer with dual run specific equipment was designed to measure its characteristics during a straightforward run as well as during turning.

### 1. A dynamic model of the system featuring the same parameters of all axles

Fig. 2 presents a dynamic model of a tractor-semi trailer in which vertical displacements  $x_1, x_2$  of centers of gravity  $T_t, T_n$  and swivel of the  $\varphi_1$  trailer were chosen as coordinates. The system has three degrees of freedom. Deformations of springs  $\xi$ , as well as coordinates  $x$  and  $\varphi$  were measured with regard to the equilibrium position. Potential energy of masses was neglected.

Assumptions:  $(x) \uparrow x, \dot{x}, \ddot{x}, F_x; (+) \downarrow \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}; \varphi_1 \geq \varphi_2; x_1 \geq x_2$



Obr. 2. Schéma ťahača s návěsom  
Fig. 2. A tractor-semi trailer

Deformácie pružín môžeme vyjadriť pomocou geometrických rozmerov, uvedených na obr. 2.

Spring deformations can be expressed by means of the geometric dimensions given in Fig. 2.

$$\xi_1 = x_1 - u_1 + c \cdot \varphi_1, \quad \xi_2 = x_1 - u_2 - (a - c) \cdot \varphi_1, \quad \varphi_2 = (x_1 - x_2 - (a - c - d) \cdot \varphi_1) / (d + e)$$

$$\xi_4 = x_2 - u_3 - ((p - e) \cdot (x_1 - x_2 - (a - c - d) \cdot \varphi_1) / (d + e))$$

Ako kinematické budenie bola zvolená ojedinelá nerovnosť tvaru:

Rare unevenness of surface was chosen as kinematic excitation:

$$u_{(x)} = 0.05(1 - \cos(\pi \cdot x)), \quad u_{(t)} = 0.05[1 - \cos(\pi \cdot v \cdot t)],$$

$$u_1 = u[t], \quad u_2 = u[t + a/v], \quad u_3 = u[t + (a + p)/v].$$

Pohybové rovnice boli zostavené pomocou Lagrangeových rovníc druhého druhu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Ek}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial Ep}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Ek}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + \frac{\partial Ep}{\partial \dot{x}_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Ek}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1} + \frac{\partial Ep}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0.$$

Ich aplikovaním na riešený prípad možno dostať výsledné pohybové rovnice (platia pre malé uhly  $\varphi_1, \varphi_2$ ) danej sústavy (pričom platí  $L = d + e, P = p - e, N = a - c$ ):

$$\left( m_1 + \frac{J_2}{L^2} \right) \ddot{x}_1 - \left( \frac{J_2}{L^2} \right) \ddot{x}_2 - \left( \frac{J_2 N}{L^2} \right) \ddot{\varphi}_1 + \dot{x}_1 \left( 2 + \frac{P^2}{L^2} \right) b - \dot{x}_2 \left( \frac{P}{L} + \frac{P^2}{L^2} \right) b + \dot{\varphi}_1 \left( (2c - a) - \frac{P^2 N}{L^2} \right) b - \dot{u}_1 b - \dot{u}_2 b + \dot{u}_3 \left( \frac{P}{L} \right) b + x_1 \left( 2 + \frac{P^2}{L^2} \right) k - x_2 \left( \frac{P}{L} + \frac{P^2}{L^2} \right) k + \varphi_1 \left( (2c - a) - \frac{P^2 N}{L^2} \right) k - u_1 k - u_2 k + u_3 \left( \frac{P}{L} \right) k = 0, \quad (1)$$

$$- \left( \frac{J_2}{L^2} \right) \ddot{x}_1 + \left( m_2 - \frac{J_2}{L^2} \right) \ddot{x}_2 + \left( \frac{J_2 N}{L^2} \right) \ddot{\varphi}_1 - \dot{x}_1 \left( \frac{P}{L} + \frac{P^2}{L^2} \right) b + \dot{x}_2 \left( 1 + \frac{P}{L} \right)^2 b + \dot{\varphi}_1 \left( \frac{PN}{L} + \frac{P^2 N}{L^2} \right) b - \dot{u}_3 \left( 1 + \frac{P}{L} \right) b - x_1 \left( \frac{P}{L} + \frac{P^2}{L^2} \right) k + x_2 \left( 1 + \frac{P}{L} \right)^2 k + \varphi_1 \left( \frac{PN}{L} + \frac{P^2 N}{L^2} \right) k - u_3 \left( 1 + \frac{P}{L} \right) k = 0, \quad (2)$$

$$- \left( \frac{J_2 N}{L^2} \right) \ddot{x}_1 + \left( \frac{J_2 N}{L^2} \right) \ddot{x}_2 + \left( J_1 + \frac{N^2}{L^2} \right) \ddot{\varphi}_1 + \dot{x}_1 \left( 2 - \frac{P^2 N}{L^2} \right) b + \dot{x}_2 \left( \frac{PN}{L} + \frac{P^2 N}{L^2} \right) b - \dot{\varphi}_1 \left( c + (c - a)^2 + \frac{P^2 N}{L^2} \right) b - \dot{u}_1 b - \dot{u}_2 b - \dot{u}_3 \left( \frac{PN}{L} \right) b + x_1 \left( 2 + \frac{P^2 N}{L^2} \right) k + x_2 \left( \frac{PN}{L} + \frac{P^2 N}{L^2} \right) k - \varphi_1 \left( c + (c - a)^2 + \frac{P^2 N}{L^2} \right) k - u_1 k - u_2 k - u_3 \left( \frac{PN}{L} \right) k = 0. \quad (3)$$

Pri požiadavke zohľadnenia rozdielnosti parametrov jednotlivých náprav (radiálna tuhosť pneumatiky, kinematické, dynamické a energetické vlastnosti ...), musia byť tieto vo výpočtoch rešpektované, ako je uvedené ďalej.

## 2. Kinematika kolesa v duálnom pojazde

Z hľadiska kinematiky sú pri odvaľovaní kolesa možné tri prípady. Ak v stykovej ploche kolesa a podložky nedochádza k vzájomnému pohybu, ide o ideálne odvaľovanie (prípady vlečeného kolesa). V prípade, že v dotykovej ploche dochádza k relatívnemu pohybu, ide o odvaľovanie s preklzom (prenos hnacej sily), resp. odvaľovanie so šmykom (prenos brzdnéj sily). V duálnom pojazde je možný výskyt všetkých spomenutých prípadov. Nezávisí to len od toho, aká sila je prenášaná (hnacia resp. brzdná), ale aj od toho, či sa koleso odvaľuje po páse s hladkým vnútorným povrchom, alebo je zabezpečený bezsklzový styk kolesa a pásu vhodným dezénom pneumatiky kolesa a tvarovaním vnútornej plochy pásu.

Pri určovaní súčiniteľa odporu valenia duálneho pojazdu je potrebné zohľadniť jeho špecifiká. Dochádza tu k odvaľovaniu pružného kolesa po vnútornej strane pásu a k odvaľovaniu pružného pásu po pružnej podložke. V prípade, že bude pôsobiť bočná

Equations of motion were constructed by means of Lagrange equations of second type:

Applying the above mentioned for the solved case we get the resultant equations (hold for small angles  $\varphi_1, \varphi_2$ ) of the system (while the following relation holds  $L = d + e, P = p - e, N = a - c$ ):

In compliance with the requirement of paying attention to differences in parameters of particular axles (radial stiffness of a tire, kinematics, dynamic and energetic characteristics, ...), these have to be respected in calculations, as will be shown later.

## 2. Kinematics of a wheel with dual run

From the viewpoint of kinematics there are three possible cases during a wheel rolling. If there is no reciprocal motion in the contact patch of a wheel and ground it is a case of ideal rolling (a case of a towed wheel). When there is relative motion in the contact area, it is a case of rolling with slip (transmission of tractive effort) or rolling with skid (transmission of braking effort). In dual run all three above mentioned cases are possible. It does not only depend on type of effort which is transmitted (tractive or braking), but also on the fact whether the wheel is rolling along the track having a smooth inner surface or whether slide-free contact of the wheel and the track is provided by means of a suitable tread of the wheel tire and also by the shaping of the inner surface of the track.

When determining the coefficient of rolling resistance of dual run it is necessary to pay attention to its specific features. A flexible wheel rolls along the inner side of the track and a flexible track rolls along flexible ground. If there is side force acting on

sila, bude dochádzať k vytváraniu mikrozón preklzavania nielen elementov behúňa pneumatiky po vnútornej ploche pásu, ale aj elementov vonkajšej plochy pásu po podložke a k bočnej deformácii pneumatiky i pásu. To spôsobí hysterézne straty v pružných členoch systému. Dôsledkom tohto je ekvivalentné zvýšenie valivého odporu duálneho pojazdu.

V prípade, že je potrebné riešiť nielen kinematické ale aj dynamické problémy odvalujúceho kolesa, je vhodné zaviesť tri súradné pravouhlé systémy, ktoré sú charakterizované jednotkovými vektormi a ďalej uvedenými súvislosťami – obr. 3.

Prvý – vzťažný, nepohyblivý systém so súradnými osami  $x_n, y_n, z_n$  a jednotkovými vektormi  $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$ .

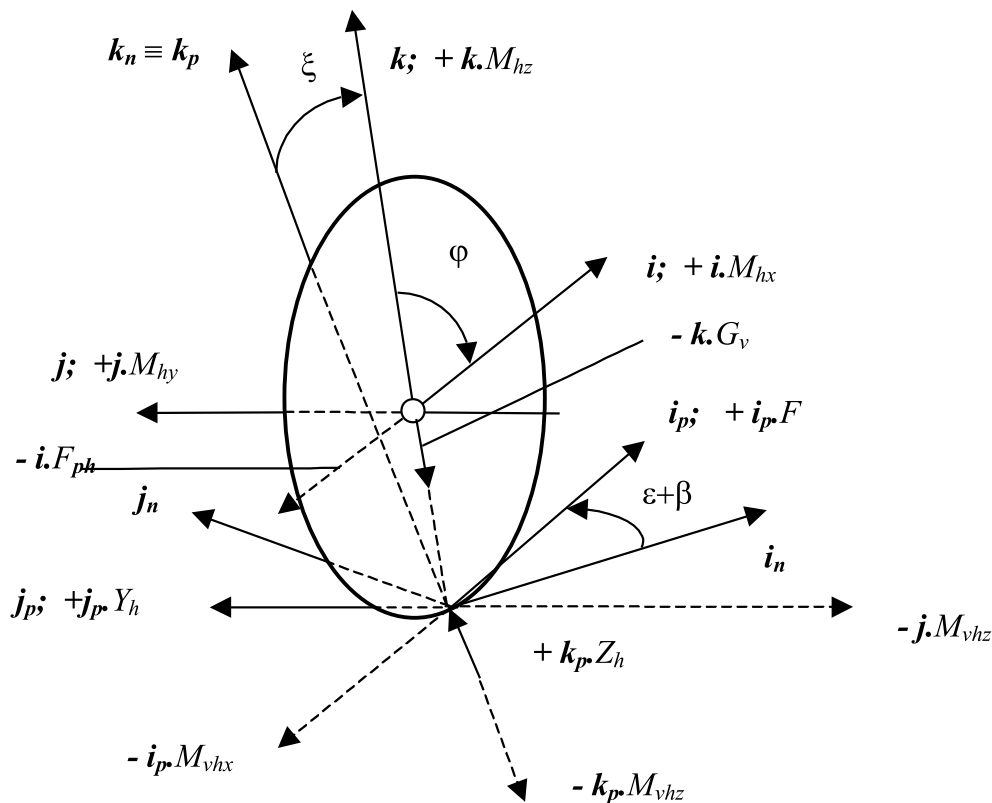
Druhý súradný systém  $x, y, z$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) je situovaný do stredu kolesa tak, že jednotkový vektor  $\vec{j}$  je totožný s osou otáčania kolesa. Smer pohybu kolesa je všeobecný, pretože zohľadňuje uhol smerovej odchýlky kolesa (nie je totožný s  $\vec{i}_n$  ani s  $\vec{i}$ ).

run, micro zones of sliding not only of elements of the tire tread along the inner surface of the track but also of the elements of the outer surface of the track along the ground occur together with lateral deformation of both the tire and the track. It will bring about hysteresis losses in elastic members of the system. The result will be an equivalent increase of rolling resistance of dual run.

When not only kinematics but also dynamic problems of the rolling wheel are to be solved it is good to work with three coordinate rectangular systems characterized by unit vectors and dependences introduced further – Fig. 3.

The first reference fixed system with coordinate axes  $x_n, y_n, z_n$  and unit vectors  $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$ .

The second coordinate system  $x, y, z$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) is situated in the center of the wheel so that the unit vector  $\vec{j}$  is identical with the axis of the wheel turning. The direction of the wheel motion is general because it respects the slip angle of tire (it is identical neither with  $\vec{i}_n$  nor with  $\vec{i}$ ).



Obr. 3. Situovanie troch súradných systémov; sily a momenty  
Fig. 3. Location of three coordinate systems; forces and moments

Tretí súradný systém osami  $x_p, y_p, z_p$  a jednotkovými vektormi  $\vec{i}_p, \vec{j}_p, \vec{k}_p$  je spojený s pásom tak, že  $\vec{i}_p \equiv \vec{i}$  a  $\vec{k}_p \equiv \vec{k}$ .

Vzájomné súvislosti medzi uvedenými súradnými systémami možno vyjadriť pomocou natočenia jedného systému voči druhému. Napr. pri otočení vektora  $\vec{i}$  o malý uhol  $\kappa$  (kedy možno predpo-

The third coordinate system is connected with the track by means of the axes  $x_p, y_p, z_p$  and the unit vectors  $\vec{i}_p, \vec{j}_p, \vec{k}_p$  so that  $\vec{i}_p \equiv \vec{i}$  and  $\vec{k}_p \equiv \vec{k}$ .

Mutual dependences among the mentioned coordinate systems can be expressed by means of swiveling of one system against another. For example, when the vector  $\vec{i}$  is turned by a small angle

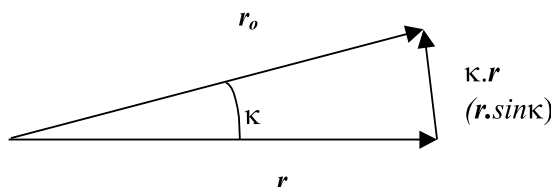
kladaf, že  $\sin \kappa = \kappa$  a  $\cos \kappa = 1$ ) - obr. 4 - vyplýva pre natočený vektor vzťah

$$\vec{r}_o = \vec{r} + \kappa \cdot \vec{r}. \quad (4)$$

Ak jednotkový vektor  $\vec{i}_p$  vyplýva z otočenia  $\vec{i}$  o  $(\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n$ , potom platí vzťah

$$\vec{i}_p = \vec{i}_n + (\epsilon + \kappa) \vec{k}_n \cdot \vec{i}_n, \text{ resp.}$$

$$\vec{i}_p = \vec{i}_n + (\epsilon + \kappa) \vec{j}_n, \quad (5)$$



Obr. 4. Natočenie vektora r  
Fig. 4. Swiveling of the vector r

v ktorom  $\epsilon$  je odklon nadstavby vozidla od zvislej osi a  $\beta$  je natočenie kolesa - čiže relatívny uhol pohybu nadstavby. Výraz  $(\epsilon + \beta)$  je absolútny uhlový pohyb kolesa.

Podobne aj pre  $\vec{j}$  vyplýva z dvoch natočení  $\vec{j}_n$  o  $(\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n + \xi \cdot \vec{i}_p$ , kde  $\xi$  je uhol odklonu kolesa

$$\vec{j} = \vec{j}_n + ((\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n + \xi \cdot \vec{i}_n + \xi \cdot (\epsilon + \beta) \cdot \vec{j}_n) \cdot \vec{j}_n. \quad (6)$$

Ak budú zanedbané malé veličiny druhého rádu, potom platia vzťahy

$$\vec{j} = \vec{j}_n + ((\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n + \xi \cdot \vec{i}_n) \cdot \vec{j}_n,$$

$$\text{resp. približne } \vec{j} = -(\epsilon + \beta) \cdot \vec{i}_n + \vec{j}_n + \xi \cdot \vec{k}_n. \quad (7)$$

Pre všetky ďalšie prepočty vrátane vzťahov (5) a (6) možno použiť ďalej uvedené schémy vzájomných väzieb:

$\vec{i}$	$\vec{i}_n$	$\vec{j}_n$	$\vec{k}_n$	(8)
$\vec{j}$	$-(\epsilon + \beta)$	$1$	$\xi$	
$\vec{k}$	$0$	$-\xi$	$1$	

$\vec{i}_p$	$\vec{i}_n$	$\vec{j}_n$	$\vec{k}_n$	(9)
$\vec{j}_p$	$-(\epsilon + \beta)$	$1$	$0$	
$\vec{k}_p$	$0$	$0$	$1$	

$\vec{i}$	$\vec{i}_p$	$\vec{j}_p$	$\vec{k}_p$	(10)
$\vec{j}$	$0$	$1$	$\xi$	
$\vec{k}$	$0$	$-\xi$	$1$	

Rýchlosť  $\vec{v}_k$  ťažiska kolesa možno v pohyblivom súradnom systéme určiť zo vzťahu

$$\vec{v}_k = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}, \quad (11)$$

$\kappa$  (we can assume that  $\sin \kappa = \kappa$  and  $\cos \kappa = 1$ ) - Fig. 4 - the following relation results for the vector of swiveling

$$\vec{r}_o = \vec{r} + \kappa \cdot \vec{r}. \quad (4)$$

If the unit vector  $\vec{i}_p$  results from the swiveling of  $\vec{i}$  by  $(\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n$  then the following relation holds

$$\vec{i}_p = \vec{i}_n + (\epsilon + \kappa) \vec{k}_n \cdot \vec{i}_n \text{ or}$$

$$\vec{i}_p = \vec{i}_n + (\epsilon + \kappa) \vec{j}_n, \quad (5)$$

in which  $\epsilon$  is deflection of the vehicle superstructure from the vertical axis

and  $\beta$  is steering of the wheel, i. e. a relative angle of the superstructure motion. The expression  $(\epsilon + \beta)$  is an absolute angular motion of the wheel.

Similarly, it also results for  $\vec{j}$  from two swivels of  $\vec{j}_n$  by  $(\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n + \xi \cdot \vec{i}_p$ , where  $\xi$  is a camber angle

$$\vec{j} = \vec{j}_n + ((\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n + \xi \cdot \vec{i}_n + \xi \cdot (\epsilon + \beta) \cdot \vec{j}_n) \cdot \vec{j}_n. \quad (6)$$

If small quantities of second order are neglected, then the following relations will hold

$$\vec{j} = \vec{j}_n + ((\epsilon + \beta) \cdot \vec{k}_n + \xi \cdot \vec{i}_n) \cdot \vec{j}_n,$$

$$\text{or, approx. } \vec{j} = -(\epsilon + \beta) \cdot \vec{i}_n + \vec{j}_n + \xi \cdot \vec{k}_n. \quad (7)$$

The following diagrams can be used for all other calculations, including the relations (5) and (6)

$\vec{i}$	$\vec{i}_n$	$\vec{j}_n$	$\vec{k}_n$	(8)
$\vec{j}$	$-(\epsilon + \beta)$	$1$	$\xi$	
$\vec{k}$	$0$	$-\xi$	$1$	

$\vec{i}_p$	$\vec{i}_n$	$\vec{j}_n$	$\vec{k}_n$	(9)
$\vec{j}_p$	$-(\epsilon + \beta)$	$1$	$0$	
$\vec{k}_p$	$0$	$0$	$1$	

$\vec{i}$	$\vec{i}_p$	$\vec{j}_p$	$\vec{k}_p$	(10)
$\vec{j}$	$0$	$1$	$\xi$	
$\vec{k}$	$0$	$-\xi$	$1$	

Velocity  $\vec{v}_k$  of the center of gravity of the wheel in the movable coordinate system can be determined from the relation

$$\vec{v}_k = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}, \quad (11)$$

a pre zrýchlenie platí vzťah

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} + \dot{x} \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (12)$$

V uvedenom vzťahu pre zrýchlenie možno derivácie vektorov pohyblivej sústavy vyjadriť pomocou vektorov nepohyblivej sústavy v zmysle prepočtu (8). Derivácie vektorov nepohyblivej sústavy podľa času sú rovné nule. Teda pre  $\vec{i} = \vec{i}_n + (\epsilon + \beta) \cdot \vec{j}_n$  platí

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{j}_n, \quad (13)$$

a vektor  $\vec{j}_n$  možno transformovať späť do pôvodnej sústavy. Ak budú zanedbané malé veličiny druhého rádu potom platia vzťahy

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{j}_n, \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= -(\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{i} + \dot{\xi} \cdot \vec{k}, \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= -\dot{\xi} \cdot \vec{j}, \end{aligned} \quad (14)$$

Po dosadení vzťahov (14) do vzťahu (12) a potom do vzťahu pre pohybovú rovnicu - obr. 3, ktorá ma tvar

$$m_k \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} = F\vec{i}_p + Y_h\vec{j}_p + Z_n\vec{k}_p - F_{ph}\vec{i} - F_y\vec{j} - G_v\vec{k} - G_k\vec{k}_p, \quad (15)$$

sa získajú tri skalárne pohybové rovnice pre smery

$$\vec{i}: \quad m_k[\ddot{x} - \dot{y}(\dot{\epsilon} + \dot{\beta})] = F - F_{ph}, \quad (16)$$

$$\vec{j}: \quad m_k[\ddot{x} + \dot{y}(\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) - \dot{z}\dot{\xi}] = Y_h - F_h + \xi(Z_h - G_k), \quad (17)$$

$$\vec{k}: \quad m_k(\ddot{z} + \dot{y}\dot{\xi}) = Z_h - (G_v - G_k) - \xi Y_h. \quad (18)$$

Zmena momentu hybnosti, je rovná výslednému momentu vonkajších síl vzhľadom k ťažisku kola

$$\vec{K}_k = \sum \vec{M}_k. \quad (19)$$

Moment hybnosti  $\vec{K}_k$  je funkciou nezávislej uhlovej rýchlosti

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad (20)$$

ktorej zložky možno vyjadriť v pohyblivom súradnom systéme, takže

$$\vec{K}_k = (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \cdot \vec{i} + (-J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) \cdot \vec{j} + (-J_{xy} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z) \cdot \vec{k}. \quad (21)$$

Dosadením zložiek vektora uhlovej rýchlosti  $\vec{\omega}$  (a pri zanedbaní malých veličín druhého rádu)

$$\vec{\omega} = \dot{\xi} \cdot \vec{i} + \dot{\varphi} \cdot \vec{j} + (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{k}, \quad (22)$$

and the following relation holds for acceleration

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} + \dot{x} \frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (12)$$

In the above mentioned relation for acceleration derivations of the vectors of the movable system can be expressed by means of the vectors of the fixed system according to the calculation (8). The derivations of the vectors of the fixed system according to time are equal to zero. Hence, for  $\vec{i} = \vec{i}_n + (\epsilon + \beta) \cdot \vec{j}_n$  holds

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{j}_n, \quad (13)$$

and vector  $\vec{j}_n$  can be transformed back to the original system. If small quantities of second order are neglected, then the following relations will hold

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{j}_n, \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= -(\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{i} + \dot{\xi} \cdot \vec{k}, \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= -\dot{\xi} \cdot \vec{j}, \end{aligned} \quad (14)$$

After substituting relation (14) to relation (12) and then to the relation for the equation of motion - Fig. 3 having the form

we get three scalar kinetic equations for directions

$$\vec{i}: \quad m_k[\ddot{x} - \dot{y}(\dot{\epsilon} + \dot{\beta})] = F - F_{ph}, \quad (16)$$

$$\vec{j}: \quad m_k[\ddot{x} + \dot{y}(\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) - \dot{z}\dot{\xi}] = Y_h - F_h + \xi(Z_h - G_k), \quad (17)$$

$$\vec{k}: \quad m_k(\ddot{z} + \dot{y}\dot{\xi}) = Z_h - (G_v - G_k) - \xi Y_h. \quad (18)$$

The change in the moment of motion is equal to the resultant moment of outer forces with reference to the wheel center of gravity

$$\vec{K}_k = \sum \vec{M}_k. \quad (19)$$

The moment of motion  $\vec{K}_k$  is the function of independent angular speed

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad (20)$$

whose components can be expressed in the movable coordinate system

Substituting the components of the angular speed vector  $\vec{\omega}$  (neglecting small quantities of second order)

$$\vec{\omega} = \dot{\xi} \cdot \vec{i} + \dot{\varphi} \cdot \vec{j} + (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{k}, \quad (22)$$

do rovnice (21) a s uvažovaním, že deviačné momenty sú pri vyvážení kolesa nulové, vyplýva vzťah pre moment hybnosti

$$\vec{K}_k = J_x \dot{\xi} \cdot \vec{i} + J_y \dot{\varphi} \cdot \vec{j} + J_z (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{k}, \quad (23)$$

a jeho zmena v čase je daná vzťahom

$$\dot{\vec{K}}_k = J_x \ddot{\xi} \cdot \vec{i} + J_y \ddot{\varphi} \cdot \vec{j} + J_z (\ddot{\epsilon} + \ddot{\beta}) \cdot \vec{k} + J_x \dot{\xi} \frac{d\vec{i}}{dt} + J_y \dot{\varphi} \frac{d\vec{j}}{dt} + J_z (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (24)$$

Vektor výsledného momentu vzhľadom na ťažisko kolesa sa skladá z vektora momentu pôsobenia nápravy  $\vec{M}_h$ , vektora pôsobenia pásu v styku s pneumatikou  $\vec{M}_v$  a vektora  $\vec{r}_{ps} \times \vec{F}_p$ , ktorý predstavuje moment síl pôsobiacich v styku kolesa s pásom k jeho ťažisku

$$\begin{aligned} \vec{M}_h &= M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}, \\ \vec{M}_v &= -M_{vx} \cdot \vec{i}_p - M_{vy} \cdot \vec{j}_p - M_{vz} \cdot \vec{k}_p, \\ \vec{F}_p &= F \cdot \vec{i}_p + Y_h \cdot \vec{j}_p + Z_h \cdot \vec{k}_p, \\ \vec{r}_{ps} &= r \cdot \xi \cdot \vec{i}_p - r \cdot \vec{k}_p. \end{aligned} \quad (25)$$

Dosadením rovnic (14), (24) a (25) do rovnice (19) v súradnom systéme  $x, y, z$ , s uvažovaním rovnic (10) a za predpokladu, že  $J_x = J_z$  a  $J_y = J_k$ , vyplývajú tri skalárne rovnice pre smery:

$$\vec{i}: J_x \dot{\xi} + J_k \varphi (\epsilon + \beta) = M_{h,x} - M_{v,x} + Y_h r + Z_h r \xi, \quad (26)$$

$$\vec{j}: J_k \ddot{\varphi} = M_{h,y} - M_{v,y} - Fr - \xi M_{v,z}, \quad (27)$$

$$\vec{k}: J_x \dot{\xi} (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) + J_k \dot{\varphi} \dot{\xi} = M_{h,z} - M_{v,z} - \xi \cdot M_{v,y}, \quad (28)$$

v ktorých vystupuje aj gyroskopický moment

$$\vec{M}_g = J_k \dot{\varphi} [-(\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{i} + \dot{\xi} \cdot \vec{k}], \quad (29)$$

pričom  $M_{v,y}$  je moment valivého odporu a  $M_{v,z}$  je stabilizačný moment.

### 3. Niektoré dynamické a energetické vlastnosti kolesa v duálnom pojazde

Tak ako klasické automobilové koleso aj koleso s pneumatikou v duálnom pojazde má možnosť deformovať sa nielen v radiálnom smere, ale aj v smere tangenciálnom a bočnom. Na prácu kolesa v duálnom pojazde má preto podstatný vplyv nielen jeho tuhosť, ale aj hmotnosť a vlastnosti väzbových síl vystupujúcich medzi jednotlivými elementmi pneumatiky.

into equation (21) and considering that the deviation moments are zero at the wheel balancing, then the following relation for moment of motion is developed

$$\vec{K}_k = J_x \dot{\xi} \cdot \vec{i} + J_y \dot{\varphi} \cdot \vec{j} + J_z (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{k}, \quad (23)$$

and its change in time is given by the relation

$$\dot{\vec{K}}_k = J_x \ddot{\xi} \cdot \vec{i} + J_y \ddot{\varphi} \cdot \vec{j} + J_z (\ddot{\epsilon} + \ddot{\beta}) \cdot \vec{k} + J_x \dot{\xi} \frac{d\vec{i}}{dt} + J_y \dot{\varphi} \frac{d\vec{j}}{dt} + J_z (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (24)$$

The vector of the resultant moment with reference to the wheel center of gravity consists of the vector of the axle impact moment  $\vec{M}_h$ , the vector of track impact in the contact point with the pneumatic tire  $\vec{M}_v$  and vector  $\vec{r}_{ps} \times \vec{F}_p$ , representing the moment of forces acting at the contact patch of the wheel with the track to its center of gravity

$$\begin{aligned} \vec{M}_h &= M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k}, \\ \vec{M}_v &= -M_{vx} \cdot \vec{i}_p - M_{vy} \cdot \vec{j}_p - M_{vz} \cdot \vec{k}_p, \\ \vec{F}_p &= F \cdot \vec{i}_p + Y_h \cdot \vec{j}_p + Z_h \cdot \vec{k}_p, \\ \vec{r}_{ps} &= r \cdot \xi \cdot \vec{i}_p - r \cdot \vec{k}_p. \end{aligned} \quad (25)$$

Substituting the equations (14), (24) and (25) into the equation (19) in the coordinate system  $x, y, z$ , taking into consideration the equation (10) and providing that  $J_x = J_z$  and  $J_y = J_k$ , three scalar equations for the following directions develop:

$$\vec{i}: J_x \dot{\xi} + J_k \varphi (\epsilon + \beta) = M_{h,x} - M_{v,x} + Y_h r + Z_h r \xi, \quad (26)$$

$$\vec{j}: J_k \ddot{\varphi} = M_{h,y} - M_{v,y} - Fr - \xi M_{v,z}, \quad (27)$$

$$\vec{k}: J_x \dot{\xi} (\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) + J_k \dot{\varphi} \dot{\xi} = M_{h,z} - M_{v,z} - \xi \cdot M_{v,y}, \quad (28)$$

in which also a gyroscopic moment appears

$$\vec{M}_g = J_k \dot{\varphi} [-(\dot{\epsilon} + \dot{\beta}) \cdot \vec{i} + \dot{\xi} \cdot \vec{k}], \quad (29)$$

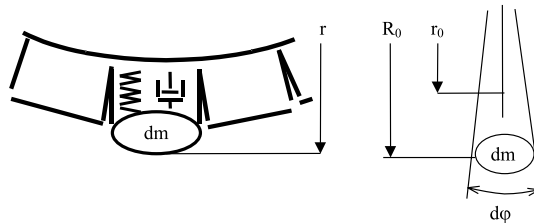
where  $M_{v,y}$  is the moment rolling resistance and  $M_{v,z}$  is the stabilization moment.

### 3. Some dynamic and energetic characteristics of the wheel with dual run

Similarly as in the case of a classical automobile wheel also a wheel with a pneumatic tire with dual run can be deformed not only in radial direction but also in tangential and lateral directions. The performance of the wheel with dual run is, therefore, substantially influenced not only by its stiffness but also by mass and by properties of binding forces existing among individual elements of the pneumatic tire.

### 3.1. Vplyv radiálnej tuhosti

Za predpokladu, že otáčajúce sa koleso uhlovou rýchlosťou  $\omega$  sa skladá z nekonečného počtu elementov hmotnosti  $dm$  (pre elementárny uhol  $d\varphi$ ) sú tieto zaťažované radiálnymi silami  $dF_r$ , a silami trenia  $dF_t$ . Nech každý element sa pohybuje v radiálnom smere v tuhom spojení s obvodom kolesa – pozri obr. 5.



Obr. 5. Základná schéma a všeobecné rozmery  
Fig. 5. Basic diagram and general dimensions

### 3.1. Influence of radial stiffness

Providing that the wheel rotating at the angle velocity  $\omega$ , consists of an infinite number of elements of mass  $dm$  (for the elementary angle  $d\varphi$ ); these elements are loaded with radial forces  $dF_r$  and friction forces  $dF_t$ . Let each element move in radial direction in a rigid contact with the wheel circumference – see Fig. 5.

Hmotnosť jednotlivých elementov  $dm$ , ak  $\mu$  charakterizuje zmeny rozmerov pneumatiky hmotnosti  $m$  možno určiť zo vzťahu

$$dm = \mu \cdot m \cdot (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot d\varphi. \quad (30)$$

Elementárna radiálna sila  $dF_r$ , od síl pružnosti pôsobiaca na elementárnu hmotnosť  $dm$  pneumatiky s radiálnou tuhosťou  $k_r$ , je daná vzťahom

$$dF_r = (r - r_0) \cdot k_r \cdot d\varphi, \quad (31)$$

a ak  $(b \frac{dr}{dt} + F)$  je trecia sila na jednotkovej dĺžke ( $d\varphi = 1$ ) pričom

prvý člen v zátvorke charakterizuje straty úmerné rýchlosti a druhý ostatné straty. Pre elementárnu treciu silu  $dF_t$  potom platí vzťah

$$dF_t = \left( b \frac{dr}{dt} + F \right) d\varphi. \quad (32)$$

Spomínaný element vykonáva v skutočnosti dva pohyby:

- tangenciálny s obvodovou rýchlosťou  $v_{tg} = r\omega$ ,
- radiálny vyplývajúci z pružnosti pneumatiky.

Po úpravách je pohybová rovnica sledovaného elementu daná vzťahom

$$\ddot{r} + b \frac{d\varphi}{dm} \dot{r} + (k_r \frac{d\varphi}{dm} - \omega^2) \cdot r \cdot k_r \cdot r_0 \frac{d\varphi}{dm} - F \frac{d\varphi}{dm}. \quad (33)$$

Zo vzťahu (30) vyplýva, že na jeden radián uhla ( $d\varphi = 1$ ) pripadá hmotnosť  $\mu \cdot m \cdot (2 \cdot \pi)^{-1}$ . Časť prvého člena pravej

strany rovnice (33) -  $k_r \frac{d\varphi}{dm}$  je kvadrátom uhlovej rýchlosti, teda

platí vzťah

$$\omega^2 = \left( \frac{2\pi k_r}{\mu m} \right)^{0,5}. \quad (34)$$

Pohybovú rovnicu možno teda napísať v konečnom tvare

$$\ddot{r} + b \cdot \frac{\omega^2}{k_r} \dot{r} + (\omega_k^2 - \omega^2) \cdot r = \frac{\omega_k^2}{k_r} (k_r \cdot r_0 - F). \quad (35)$$

If  $\mu$  characterizes changes of dimensions of the pneumatic tire mass  $m$ , the mass of individual elements  $dm$  can be determined from the relation

$$dm = \mu \cdot m \cdot (2 \cdot \pi)^{-1} \cdot d\varphi. \quad (30)$$

The elementary radial force  $dF_r$  from forces of elasticity acting on the elementary mass  $dm$  of the pneumatic tire having radial stiffness  $k_r$  is given by the relation

$$dF_r = (r - r_0) \cdot k_r \cdot d\varphi, \quad (31)$$

and if  $(b \frac{dr}{dt} + F)$  is friction force along the unit length ( $d\varphi = 1$ );

where the first element in the brackets characterizes losses proportional to the velocity and the second characterizes other losses. Then, for the elementary friction force  $dF_t$  the following relation holds

$$dF_t = \left( b \frac{dr}{dt} + F \right) d\varphi. \quad (32)$$

The mentioned element actually carries out two motions:

- tangential, with circumferential velocity  $v_{tg} = r\omega$ ,
- radial, resulting from the pneumatic tire elasticity.

After the arrangements, the kinetic equation of the observed element is given by the relation

$$\ddot{r} + b \frac{d\varphi}{dm} \dot{r} + (k_r \frac{d\varphi}{dm} - \omega^2) \cdot r \cdot k_r \cdot r_0 \frac{d\varphi}{dm} - F \frac{d\varphi}{dm}. \quad (33)$$

From the relation (30) follows that to one radian of the angle ( $d\varphi = 1$ ) corresponds the mass  $\mu \cdot m \cdot (2 \cdot \pi)^{-1}$ . A part of the first

element of the right side of the equation (33) -  $k_r \frac{d\varphi}{dm}$  is a square

of the angular velocity and, therefore, the following relation holds

$$\omega^2 = \left( \frac{2\pi k_r}{\mu m} \right)^{0,5}. \quad (34)$$

The equation of motion can be then written in its definitive form

$$\ddot{r} + b \cdot \frac{\omega^2}{k_r} \dot{r} + (\omega_k^2 - \omega^2) \cdot r = \frac{\omega_k^2}{k_r} (k_r \cdot r_0 - F). \quad (35)$$

Ak sa parametre  $k_r$ ,  $\omega_k$ ,  $b$ ,  $\omega$  a  $F$  nebudú s časom meniť, tak rovnica (35) je lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi a pravou stranou. Riešením tejto rovnice je možné určiť kmitanie sledovaného elementu pneumatiky pre rôzne prevádzkové podmienky.

### 3.2. Straty energie

Energiu elementu pneumatiky pri opúšťaní zóny kontaktu možno všeobecne napísať ako súčet jeho kinetickej a potenciálnej energie

$$E = E_k + E_p. \quad (36)$$

Pri opúšťaní zóny kontaktu pneumatiky jej element kmitá. Keďže hodnotu potenciálnej energie elementu možno zanedbať (polomer pneumatiky je v tomto bode približne rovný  $R_0$  - obr. 5), bude celková energia rovná kinetickej energii v momente opúšťania zóny kontaktu. Celkovú kinetickú energiu všetkých elementov pneumatiky možno vyjadriť vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2} \int v_{rel}^2 dm. \quad (37)$$

Aby bolo možné túto energiu vypočítať je potrebné poznať rozloženie hmotnosti po priereze pneumatiky a závislosť zmeny relatívnej rýchlosti. Podľa Kulikova možno radiálnu rýchlosť krajného elementu pneumatiky (v mieste dotyku) pri opúšťaní zóny kontaktu určiť z približného vzťahu

$$v_0 = R_0 \cdot \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \left( 1 + \frac{R_0 \cos \varphi_0}{R_{pa}} \right). \quad (38)$$

Radiálna rýchlosť elementov v mieste styku pneumatiky s ráfikom je nulová. Rýchlosť ostatných elementov pneumatiky sa bude teda meniť v hraniciach od  $v_0 \rightarrow 0$ . Zmena rýchlosti môže byť všeobecná, resp. elementy môžu kmitať v jednej fáze (súčasné vzdalovanie sa od centra). Experimenty ukázali, že elementy obrysu pneumatiky kmitajú obyčajne v jednej fáze.

V prípade, že sú známe závislosti spomínaných veličín (rozloženia hmotnosti a zmeny rýchlosti), je možné vypočítať energiu za jednu otáčku kolesa, pretože všetky elementy prejdú zónou kontaktu, získajú kinetickú energiu a využijú ju pri radiálnom vlastnom kmitaní za zónou kontaktu.

Keďže čas jednej otáčky kolesa vyplýva zo vzťahu  $2\pi = \omega \cdot \Delta t$ , možno stratový výkon potrebný na kmitanie určiť z nasledujúceho vzťahu

$$P_{rk} = \frac{\int R_0^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_0 (R_{pa} + R_0 \cos \varphi_0)^2 dm}{4\pi R_{pa}^2} \omega^2. \quad (39)$$

Ak stredná obvodová rýchlosť pre valivý polomer kolesa  $r_v$  v zóne kontaktu pneumatiky s pásom je  $v = r_v \omega$ , potom radiálna sila v dôsledku kmitania elementov pneumatiky je daná vzťahom

$$Frd = \frac{\int R_0^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_0 (R_{pa} + R_0 \cos \varphi_0)^2 dm}{4\pi R_{pa}^2 r_v^3} v^2. \quad (40)$$

If the parameters  $k_r$ ,  $\omega_k$ ,  $b$ ,  $\omega$  and  $F$  do not change with time, then the equation (35) is a linear differential equation of second order with constant coefficients and with a right side. When solving this equation it is possible to define vibrations of the observed element of the pneumatic tire for different operational conditions.

### 3.2. Losses of energy

When leaving the contact area, energy of the pneumatic tire element can be generally described as a sum of its kinetic and potential energy

$$E = E_k + E_p. \quad (36)$$

At leaving the contact area of the pneumatic tire, its element vibrates. As the value of potential energy of the element can be neglected (radius of the tire in this point is approximately equal to  $R_0$  - Fig. 5), the total energy will be equal to kinetic energy in the moment of leaving the contact area. Total kinetic energy of all elements of the pneumatic tire can be expressed by means of the relation

$$E_k = \frac{1}{2} \int v_{rel}^2 dm. \quad (37)$$

In order to calculate this energy it is necessary to know distribution of mass along the tire cross-section and dependence of a change of relative speed. According to Kulikov radial velocity of the boundary element of the tire (in a contact patch) at leaving the contact area can be determined from the approximate relation

$$v_0 = R_0 \cdot \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \left( 1 + \frac{R_0 \cos \varphi_0}{R_{pa}} \right). \quad (38)$$

Radial velocity of elements in the point of the tire-rim contact is zero. Velocity of other elements of the pneumatic tire will, therefore, change within the range from  $v_0 \rightarrow 0$ . The change of velocity can be general or, in other words, the elements can vibrate in one phase (simultaneous motion away from the center). The experiments have shown that elements of the tire outline usually vibrate in the same phase.

When dependences of the mentioned quantities are known (distribution of mass and changes of velocity), it is possible to calculate energy during one revolution of the wheel because all elements pass through the contact area, acquire kinetic energy and use it in radial vibration behind the contact area.

As the time need for one turning of the wheel follows from the relation  $2\pi = \omega \cdot \Delta t$ , loss output needed for vibrations can be determined from the following relation

$$P_{rk} = \frac{\int R_0^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_0 (R_{pa} + R_0 \cos \varphi_0)^2 dm}{4\pi R_{pa}^2} \omega^2. \quad (39)$$

If the mean circumferential velocity for rolling radius of the wheel  $r_v$  in the area of the tire-track contact is  $v = r_v \omega$ , then radial force due to vibration of the tire elements is given by the relation

$$Frd = \frac{\int R_0^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_0 (R_{pa} + R_0 \cos \varphi_0)^2 dm}{4\pi R_{pa}^2 r_v^3} v^2. \quad (40)$$

Za predpokladu, že uhol  $\varphi_0$  bude malý, potom  $\text{tg}\varphi_0 \approx \varphi_0$ ;  $\cos \varphi_0 = 1$  a  $R_0 \approx r_v \approx r_0$  takže rovnica (40) nadobudne tvar

$$F_{rd} \approx \frac{\int \varphi_0^2 (R_{pa} + r_0)^2 dm}{4\pi R_{pa}^2 r_0} v^2, \quad (41)$$

resp.

$$F_{rd} \approx \frac{\int \varphi_0^2 (R_{pa} + r_0)^2 r_0 dm}{4\pi R_{pa}^2} \omega^2. \quad (42)$$

Pri dynamickom výpočte je potrebné rešpektovať rôzne vlastnosti náprav vozidla. Uvedené vzťahy aplikované pre koleso v duálnom pojazde definujú niektoré vstupné parametre náprav vozidla a to na základe informácií o kolese (typ pneumatiky, rozmer, tlak v pneumatike atď.).

#### 4. Dynamický model sústavy s rozdielnymi parametrami náprav

Matematický model, ktorého výpočtová schéma je na obr. 6, umožňuje výpočet príslušných hodnôt ťahača s návesom pre ľubovoľné hodnoty tuhostí a tlmení kolies jednotlivých náprav. Tuhosti a tlmenia na jednotlivých kolesách náprav môžu byť okrem iného významne ovplyvnené napr. typom použitých pneumatík, tlakom vzduchu v pneumatikách a pod.

Supposing that the angle  $\varphi_0$  is small, then  $\text{tg}\varphi_0 \approx \varphi_0$ ;  $\cos \varphi_0 = 1$  and  $R_0 \approx r_v \approx r_0$  and the equation (40) will have the following form

$$F_{rd} \approx \frac{\int \varphi_0^2 (R_{pa} + r_0)^2 dm}{4\pi R_{pa}^2 r_0} v^2, \quad (41)$$

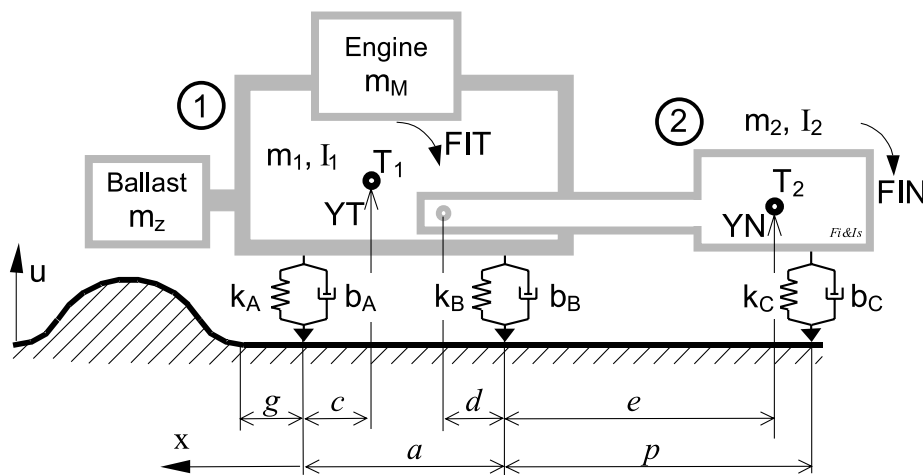
or

$$F_{rd} \approx \frac{\int \varphi_0^2 (R_{pa} + r_0)^2 r_0 dm}{4\pi R_{pa}^2} \omega^2. \quad (42)$$

In case of dynamic calculation it is necessary to take into consideration different characteristics of the vehicle axles. The mentioned relations implemented for the wheel with dual run define some input parameters of the vehicle axles on the basis of information about the wheel (type of pneumatic tire, dimension, press in tire, etc.).

#### 4. Dynamic model of the system with different parameters of axles

The mathematical model whose computing scheme is in Fig. 6 enables the calculation of corresponding values of the tractor-semi trailer for arbitrary values of stiffness and damping of wheels of individual axles. Stiffness and damping on individual wheels of axles can be, apart from other things, significantly influenced by, e.g. a type of the used pneumatic tires, air pressure in tires, etc.



Obr. 6. Schéma sústavy ťahača s návesom s rozdielnymi parametrami náprav  
Fig. 6. System of a tractor-semi trailer with different parameters of axles

Model ťahača s návesom využíva zjednodušený model pneumatík, uvedený na obr. 7. Pre vývin radiálnej sily sú pre pneumatiku rozhodujúce tieto aspekty:

- nelinearita deformačnej konštitučnej závislosti (závislosti medzi radiálnou deformáciou a silou). Konštitučná závislosť (ďalej len k. z.) je vždy typu *spodné obmedzenie* vplyvom možnosti odsokku kolesa od podložky. Pre praktické výpočty je potrebné používať k. z., stanovenú za podmienok, zodpovedajúcich najčastejšie využívanému režimu činnosti pneumatík. Pre bežné podmienky

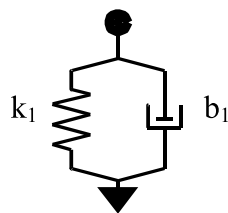
The model of the tractor-semi trailer makes use of simplified type of pneumatic tires shown in Fig. 7. To develop radial force the following aspects are decisive for a pneumatic tire:

- non-linearity of deformational, constitutional dependence (dependence between radial deformation and force). Constitutional dependence (further abbrev. as c. d.) is always of *down limitation* type due to possible interruption of the wheel-ground contact. For practical calculations it is necessary to use the c. d. given under the conditions corresponding to the most frequently used

prevádzky malotraktora nie je potrebné vplyv nenulovej krivosti nerovnosti podložky na zmenu deformačnej k. z. uvažovať.

- tlmenie pneumatiky, ktoré je opäť závislé na rovnakých prevádzkových parametroch. Vzhľadom k jeho malej veľkosti v rozhodujúcom režime činnosti pneumatiky je možné ho uvažovať ako lineárne závislé od tlaku v pneumatike.

Z nameranej [1] deformačnej charakteristiky jednej pneumatiky Barum 168/80 R 13 OR 34 (obr. 8) vyplýva jej radiálna tuhosť  $k = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  a konštanta lineárneho tlmenia  $b = 30 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  pre amplitúdu deformácie pneumatiky  $w \geq 1,5 \text{ mm}$ . Vzhľadom na to, že meranie konštanty tlmenia pneumatík použitých na riešenom malotraktore zatiaľ nebolo realizované, bola vo výpočtoch uvažovaná orientačná hodnota podľa [1].



Obr. 7. Zjednodušený model pneumatiky  
Fig. 7. Simplified model of tire

Štandardné parametre sústavy boli nasledovné:  $v = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ;  $a = 0,52 \text{ m}$ ;  $v = 0,1 \text{ m}$ ;  $d = 0,2 \text{ m}$ ;  $e = 1 \text{ m}$ ;  $p = 1,23 \text{ m}$ ;  $c = 0,1 \text{ m}$ ;  $k = 4 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ;  $b = 60 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ; motor: AGZAT 3,5 kW/5500 $\text{min}^{-1}$ ,  $m_M = 16 \text{ kg}$  (bez príslušenstva). V legende obrázkov je uvedené, ktorý zo štandardných parametrov bol zmenený (napr. hmotnosť použitého motora  $m_M$ , hodnoty rýchlosti) a príslušná hodnota na akú bol zmenený (ostatné parametre zostávajú štandardné).

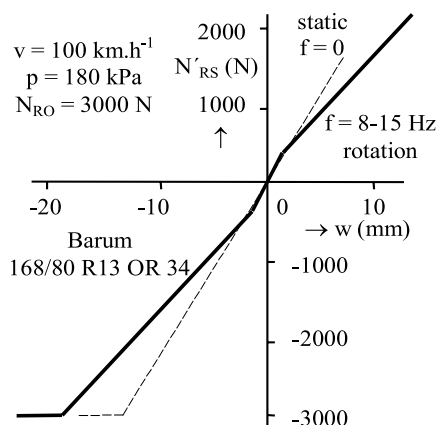
Simulačný výpočet bol urobený pre kinematické budenie tvaru funkcie  $\cos$ , pričom výška nerovnosti bola uvažovaná 0,05 m a dĺžka nerovnosti 0,15 m. Grafické znázornenie kinematického budenia jednotlivých náprav v závislosti od polohy vozidla je znázornené na obr. 9.

Vzhľadom na požiadavku viacerých výkonových variantov stroja (deklarovanú v cieľoch projektu) bola urobená analýza vplyvu hmotnosti motora (obr. 13). Do riešeného malotraktora sa štandardne montuje motor AGZAT (3,5 kW/5500  $\text{min}^{-1}$ ) s hmotnosťou 16 kg bez príslušenstva.

operational mode of pneumatic tires. For ordinary operational conditions of a small tractor it is not necessary to consider influence of non-zero curvature of unevenness of ground on change of c. d. deformation;

- damping of the tire which is also dependent on the same operating parameters. Due to its slight magnitude in the decisive operational mode of the pneumatic tire it is possible to consider it as being linearly dependent on tire pressure.

From the measured [1] deformation characteristic of one pneumatic tire Barum 168/80 R 13 OR 34 (Fig. 8.) follows its radial stiffness  $k = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  and the constant of linear damping  $b = 30 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  for the amplitude of pneumatic tire deformation  $w \geq 1,5 \text{ mm}$ . Owing to the fact that measurements of the damping constant of the tires used on the small tractor described in this article have not been carried out so far, the orientation value specified in [1] was used for the purpose of our calculations.

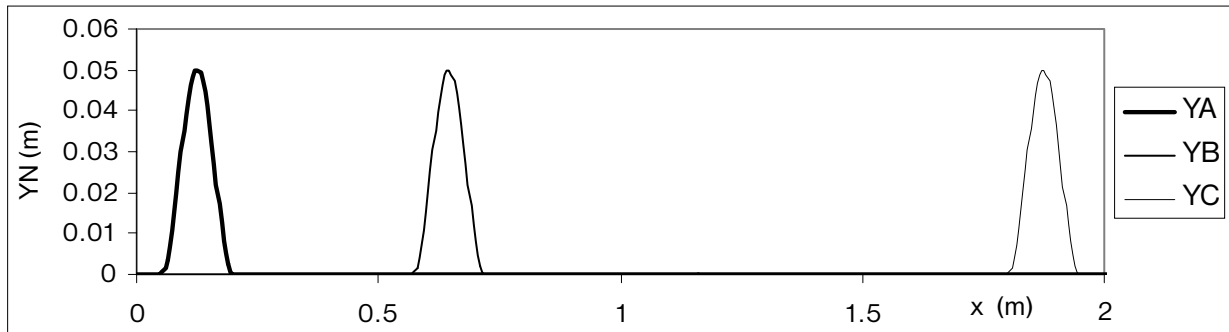


Obr. 8. Deformačná charakteristika pneumatiky  
Fig. 8. Deformation characteristic of tire

The standard parameters of the system were the following:  $v = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ;  $a = 0,52 \text{ m}$ ;  $v = 0,1 \text{ m}$ ;  $d = 0,2 \text{ m}$ ;  $e = 1 \text{ m}$ ;  $p = 1,23 \text{ m}$ ;  $c = 0,1 \text{ m}$ ;  $k = 4 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ;  $b = 60 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ; engine: AGZAT 3.5 kW/5500 $\text{min}^{-1}$ ,  $m_M = 16 \text{ kg}$  (without accessories). The text below the figures says which of the standard parameters was changed (e.g. mass of the used engine  $m_M$ , values of velocity) and the corresponding value to which it was altered (other parameters remain standard).

The simulation calculation was made for kinematics excitation of  $\cos$  function where the height of unevenness was considered 0.05 m and the length of unevenness 0.15 m. Graphic presentation of kinematics excitation of individual axles in dependence on a position of the vehicle is in Fig. 9.

Taking into consideration the requirement for more output variants of the machine an analysis of influence of the engine mass was done (Fig. 13). The engine AGZAT (3.5 kW/5500  $\text{min}^{-1}$ ) having the mass of 16 kg without accessories was mounted in a standard way into the investigated small tractor-semi trailer.



Obr. 9. Kinematické budenie jednotlivých náprav  
Fig. 9. Kinematic excitation of individual axles

Niektoré alternatívne motory:

Robin EH18V	16,7 kg (4,5 kW/3600 min <sup>-1</sup> ),
ACME ADN 48W	55 kg (7,5 kW/3600 min <sup>-1</sup> ),
ACME ADN 54W	55 kg (8,4 kW/3600 min <sup>-1</sup> ).

Some alternative engines:

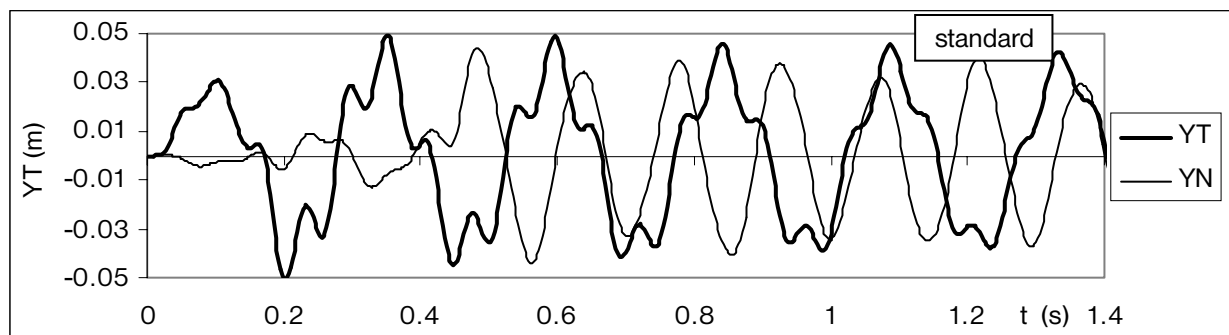
Robin EH18V	16.7 kg (4.5 kW/3600 min <sup>-1</sup> ),
ACME ADN 48W	55 kg (7.5 kW/3600 min <sup>-1</sup> ),
ACME ADN 54W	55 kg (8.4 kW/3600 min <sup>-1</sup> ).

Analýza parametrov sústavy je podrobne rozpracovaná v [6]. Pre ilustráciu sú na obr. 10 - 13 uvedené priebehy niektorých charakteristických veličín.

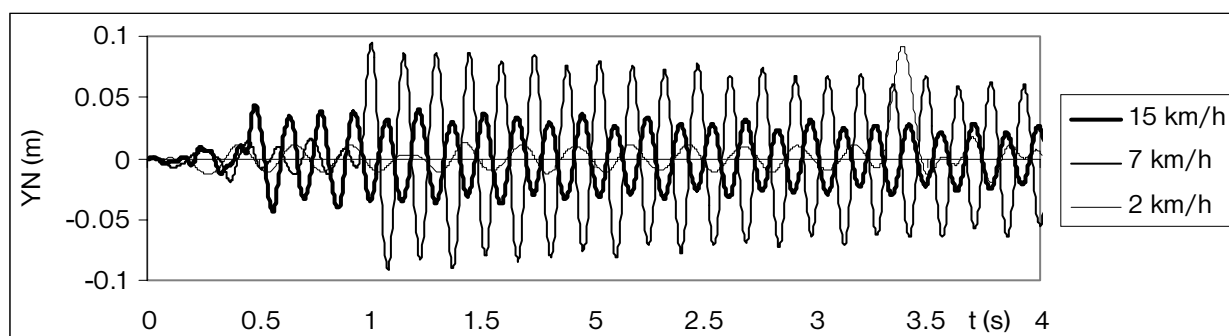
Realizačným výstupom riešenej problematiky je definovanie optimálnych parametrov pre návrh prototypu malotraktora s duálnym pojazdom. Z obr. 10 - 13 je na prvý pohľad zrejmé, že

A detailed analysis of the system parameters is presented in [6]. Courses of some characteristic quantities can be seen in Figs. 10 - 13.

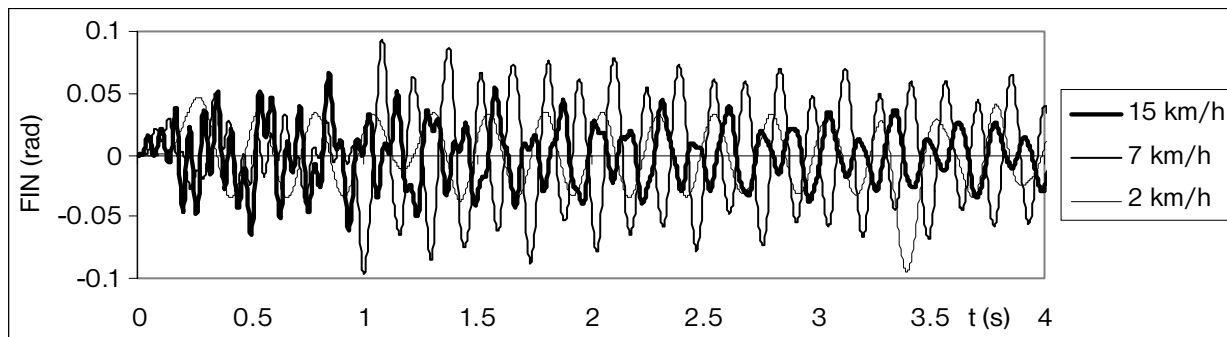
An output of the solved problems is to define optimal parameters suitable for designing a small tractor-semi trailer with dual run. It is obvious from Figs. 10 - 13 that the damping of the



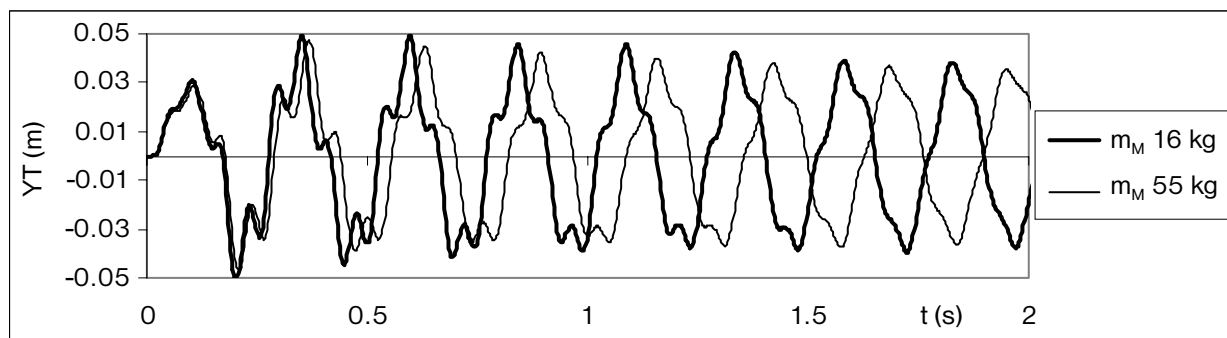
Obr. 10. Poloha ťažísk ťahača a návesu pre štandardné parametre  
Fig. 10. Position of centers of gravity of the tractor and semi-trailer for standard parameters



Obr. 11. Priebeh YN pre rôzne rýchlosti  
Fig. 11. A course of YN for different velocities



Obr. 12. Priebeh FIN pre rôzne rýchlosti  
Fig. 12. A course of FIN for different velocities



Obr. 13. Priebeh YT pre rôzne hmotnosti motora  
Fig. 13. A course of YT for different engine masses

tlmenie sústavy, ktorého parametre boli prevzaté z [1] je veľmi malé. Táto skutočnosť potvrdzuje nevyhnutnosť experimentálne overiť konštanty tlmenia pre pneumatiky riešeného malotraktora. Pre overenie príslušných vstupných parametrov výpočtu bol navrhnutý skúšobný stav KO-PA-PO.

## 5. Skúšobný stav

Pre vyhodnocovanie nielen základných vlastností duálneho pojazdu, ale aj pre overenie teórie duálneho pojazdu je potrebné poznať niektoré reálie, vznikajúce v interakcii koleso – pás – podložka (KO-PA-PO). Skúšobný stav navrhovaný na Katedre koľajových vozidiel, motorov a zdvihadiel (KKVMZ) má umožniť získať základné informácie o interakcii koleso – pás – podložka. Táto interakcia významnou mierou rozhoduje o vlastnostiach stroja. Vzhľadom na existujúce finančné možnosti je zariadenie navrhnuté tak, aby bolo čo najjednoduchšie a boli využité dostupné existujúce zariadenia laboratórií katedry.

Pri navrhovaní skúšobného stavu na zisťovanie niektorých základných vlastností interakcie koleso – pás – podložka (pozri obr. 14) sa vychádzalo z týchto základných všeobecných požiadaviek:

- jednoduchosť a spoľahlivosť zariadenia,
- minimalizácia nákladov na výrobu,
- využiteľnosť niektorých existujúcich zariadení laboratórií KKVMZ

system, the parameters of which were taken from [1] is minimal. This fact underlines the necessity to experimentally verify the damping constants for pneumatic tires of the investigated small tractor. To verify the corresponding input parameter of the calculation the test stand KO-PA-PO was designed.

## 5. Test stand

To evaluate not only the basic characteristics of dual run but also to verify dual run theory it is necessary to know some facts occurring during an interaction of wheel-track-ground (KO-PA-PO). The test stand designed in the Department of Railway Vehicles, Engines and Lifting Equipment enables to acquire basic information about the above-mentioned wheel-track-ground interaction. This interaction significantly influences the machine characteristics. Owing to the present financial situation the test stand was designed so as to be as simple as possible with the objective of using the existing equipment of the department laboratories.

The basic general requirements served as the basis when designing the test stand for investigation of some fundamental characteristics of the wheel-track-ground interaction (see Fig. 14):

- simplicity and reliability of the equipment,
- minimalization of production costs,
- utilization of some already existing laboratory equipment.

a požiadaviek špecifických vyplývajúcich zo samotného cieľa úlohy t. j.:

- overenie základných technických možností duálneho pojazdu,
- zistenie niektorých základných parametrov duálneho pojazdu,
- overenie správania sa duálneho pojazdu pri pôsobení bočnej sily so zameraním sa na vedenie pásu,
- porovnanie základných vlastností duálneho pojazdu v prevedení „ako pásový pojazd“ a „ako kolesový pojazd“, t. j. v oboch polohách turasu,
- v prípade potreby zisťovať životnosť a spoľahlivosť základných častí duálneho pojazdu,
- umožniť konfrontovať výsledky niektorých teoretických riešení súvisiacich s podstatou návrhu duálneho pojazdu.

Na základe uvedených požiadaviek bola spracovaná úvodná štúdia projektu skúšobného stavu, pozostávajúceho z ďalej uvedených základných častí:

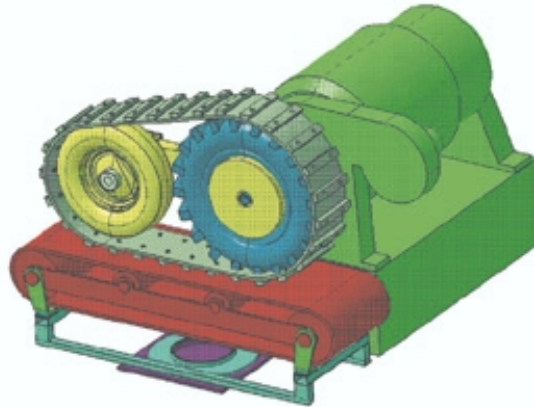
1. *zdroj energie*. Ako zdroj energie je navrhnutý elektrický indukčný dynamometer MEZ Vsetín KS 37A – 4 tvar M642ZZ, ktorý je inštalovaný v priestoroch laboratórií katedry a jeden jeho koniec je využívaný na zisťovanie mechanických strát spaľovacích motorov. Základné parametre dynamometra sú uvedené v tabuľke 1.
2. *blok - stojan*, pozostávajúci z:
  - rámu ako nosnej časti,
  - nekonečného pásu, ako podložky. Povrch nekonečného pásu možno následne riešiť rôznymi úpravami imitujúcimi vlastnosti rôznych druhov podložky,
  - vychýľovanej časti, umožňujúcej modelovať jazdu v oblúku.
3. *duálny pojazd*, pozostávajúci z:
  - naklápanej konzoly – turas,
  - hnacieho kolesa,
  - napínacieho kolesa,
  - pásu.

Základné parametre dynamometra KS 37A – 4 Tab. 1

Výkon kW	7,3	22	41
Otáčky min <sup>-1</sup>	500	1500	2800

## 6. Záver

Model na obr. 2 predpokladá rovnaké hodnoty tuhostí a tlmení na jednotlivých nápravách. Aplikácia odvodených vzťahov (1), (2) a (3) pre výpočet je časovo veľmi náročná. Pre prípad rôznych tuhostí a tlmení jednotlivých náprav a analýzu vplyvu hmotnostných a rozmerových parametrov bol navrhnutý spresnený model vozidla uvedený na obr. 6. V tomto modeli boli aplikované spres-



Obr. 14. Virtuálny model skúšobného stavu KO-PA-PO  
Fig. 14. Virtual model of the KO-PA-PO test stand

There were also some specific requirements resulting from the objective of the task itself, i. e.:

- to verify basic technical possibilities of dual run,
- to determine some basic parameters of dual run,
- to verify dual run behavior when side force is applied, focusing on the track guidance,
- to compare basic characteristics of dual run when operating as “a tracked run” and as “wheel run”, i. e. in both positions of the inclinable console,
- to determine service life and reliability of basic elements of dual

- drive when necessary,
- to enable confrontation of results of some theoretical solutions having relations to the core of the dual run design.

On the basis of the above-mentioned requirements an introductory study of the test stand project was prepared. It consisted of the following basic parts:

1. *source of energy*. An electric induction dynamometer MEZ Vsetín KS 37A – 4 of M642ZZ shape has been suggested as the source of energy. It is installed in the laboratories of the department. One end of the dynamometer is used to determine mechanical losses of combustion engines. Basic parameters of the dynamometer are shown in Table 1.
2. *block - stand*, consisting of:
  - a frame as a supporting structure,
  - an infinite strip serving as ground. The surface of the strip can be altered so that characteristics of various types of ground can be imitated,
  - a part which can be deflected, thus enabling simulation of ride in arc.
3. *dual run*, consisting of:
  - an inclinable console,
  - a driving wheel,
  - a tightening wheel,
  - a strip.

Basic parameters of a dynamometer KS 37A – 4 Tab. 1

Power kW	7,3	22	41
Revolution min <sup>-1</sup>	500	1500	2800

## 6. Conclusion

The model shown in Fig. 2 suggests equal values of stiffness and damping on individual axles. The application of derived relations (1), (2) and (3) for calculation is time consuming. A more precise model of a vehicle shown in Fig. 6 was designed for cases of different stiffness and damping of individual axles and for analysis of influence of mass and dimensional parameters. In this

nené charakteristiky pneumatík a boli rešpektované niektoré kinematické, dynamické a energetické vlastnosti kolesa v duálnom pojazde. Pri uvažovaní priestorového pohybu kolesa boli zohľadnené zotrvačné sily vyplývajúce zo súčiny rýchlosti translačného a rotačného pohybu, vplyv bočnej sily na koleso a vektor výsledného momentu vzhľadom na ťažisko kolesa zohľadňujúce gyroskopický účinok otáčania kolesa. Aby bola problematika styku koleso - pás - podložka v riešenom duálnom pojazde podrobne vyšetrená je potrebné teoreticky doriešiť niektoré problémy súvisiace so stykom kolesa a špecificky upraveného pásu. Toto nie je možné riešiť všeobecne, ale iba pre konkrétnu konštrukčnú úpravu pásu. Na overenie získaných výsledkov bol navrhnutý skúšobný stav.

*Uvedené výsledky sú realizačným výstupom grantovej úlohy č. 1/5269/98 [8].*

model more precise characteristics of pneumatic tires were applied and some kinematics, dynamic and energetic characteristics of a wheel with dual run were respected. When considering spatial motion of the wheel, inertial forces resulting from the product of velocity of translational and rotational motions, influence of side force on the wheel and the vector of the resultant moment with regard to the wheel center of gravity and taking into account gyroscopic effect of the wheel rotation were considered. In order to investigate the problems arising from the wheel - track - ground interaction with dual run properly and in detail it is necessary to solve theoretically some problems connected with contact of the wheel with a specifically adapted track. This cannot be solved in a general way, it has to be solved only for specific, concrete constructional adaptation of a track. The test stand was designed to verify the gathered results.

*The results included in the paper are outputs of grant project No. 1/5269/98 [8].*

## 7. Literatúra - References

- [1] APETAUR, M.: *Nelineární dynamické soustavy automobilu a jejich prvky stacionárně náhodně buzené*. [Doktorská dizertace], ČVUT Praha, Praha, 1987.
- [2] ČÁP, J., FREIBAUER, L., HLAVŇA, V.: *Teorie vozidel*, Alfa, Bratislava, 1991.
- [3] GARDEN, E., WORSWICK, T.: *Transaction of the Institution of the Rubber Industry*, vol. 27, N. 2, 1951.
- [4] MANN, H.: *Teorie strojních soustav II. - DYNAST*, ES VUT Brno, Brno, 1990.
- [5] NOVOPOLSKIJ, V. I.: *Ekspérimentalnoe issledovanie poter na kačenie automobil'nogo kolesa*, Avtomobil'naja i traktornaja promyšlennost', N 1, 1954.
- [6] SEMETKO, J., JANOŠKO, I.: *Dynamometric vehicle for determination of drawing characteristics*. In. Czasopismo techniczne. Mechanika, Krakov, 6/98
- [7] SEMETKO, J., JANOŠKO, I.: *Ťahové skúšky traktora s mikropočítačom*. In. Acta Technol. agric. Univ. agric. Nitra, 31/94
- [8] Projekt VEGA MŠ SR a SAV: „Výskum koncepcie a interdisciplinárne riešenie duálneho pohonu mobilných energetických prostriedkov, z východzieho bázového kolesového usporiadania 2K2 s určením pre horské podmienky“, DUAL '98, DUAL '99, DUAL 2000, zborníky z kolokvií k uvedenej grantovej úlohe, EDIS Žilina, 1998, 1999, 2000.