

Bohuš Leitner \*

# STOCHASTICKÉ ČASOVÉ RADY A MOŽNOSTI ICH VYUŽITIA PRI URČOVANÍ VYBRANÝCH MODÁLNYCH CHARAKTERISTÍK MECHANICKÝCH KONŠTRUKCIÍ

## STOCHASTIC TIME SERIES AND POSSIBILITIES OF THEIR USE FOR SELECTED MODAL CHARACTERISTICS DETERMINATION OF MECHANICAL STRUCTURES

*Príspevok je venovaný možnosti využitia matematického aparátu teórie stochastických časových postupností k popisu a modelovaniu stochastických dynamických systémov so zvláštnym zameraním na systémy mechanické. Jeho cieľom je stručne charakterizovať základné pojmy a vzťahy matematického aparátu teórie stochastických časových radov, popis algoritmu určenia štatisticky adekvátneho diskrétno-ho modelu stochastického dynamického systému, odvodenie súvislostí medzi parametrami diskrétnych a spojitých modelov a naznačenie možnosti aplikácie uvedeného prístupu pri určovaní niektorých modálnych charakteristík mechanických konštrukcií.*

### 1. Úvod

Jedným z možných spôsobov analýzy komplexných dynamických systémov, bez straty presnosti a bez nutnosti použitia komplikovaného matematického aparátu, je pozorovanie systému počas jeho činnosti a využitie ním produkovaných údajov k jeho analýze. Takto analyzované systémy nazývame *dátami určené systémy (DUS)*. To znamená, že nepotrebujeme vedieť nič o štruktúre systému a všetky závery a výsledky sú založené iba na pozorovaných hodnotách.

Údajmi určené systémy sú prezentované súbormi výstupných spojitých signálov, ktorých diskretizáciou s konštantným intervalom diskretizácie možno získať postupnosť údajov (hodnôt), ktorá predstavuje podklad pre popis a analýzu skúmaného systému. Pritom hlavným cieľom je získanie možnosti predikcie a ovplyvnenia správania sa systému, čo môže predstavovať jednoduchú prevenciu, aby sa systém nedostal do neželateľného stavu [1].

K popisu DUS je možné s výhodou využiť *autoregresné modely s kľavými priermi tzv. ARMA modely*. Ich výhodou sú hlavne precízne formulované štatistické kritériá a pomerne jednoduchý matematický aparát štatistickej regresnej analýzy a testovania štatistických hypotéz. Ich nevýhodou je komplikovanosť programov identifikácie aj napriek ich jednoduchému matematickému aparátu a teda ich náročnosť na počítačový čas. Preto sú vhodné iba k off-line identifikácii a modelovaniu dynamických systémov a ich

*The paper deals with the possibilities of using mathematical apparatus of a stochastic time series for stochastic systems description and modeling, especially mechanical ones. Its purpose is to briefly characterise fundamental terms and equations of mathematical apparatus of time series, to describe the algorithm of a statistically adequate discrete model of a stochastically dynamic system to develop relationship between parameters of discrete and continuous models and to show some possibilities of developed strategy applications for solution of selected modal characteristics of mechanical structures.*

### 1. Introduction

One possible way of complex systems analysis without loss of accuracy and without necessity of complicated mathematical apparatus utilisation is the observation of a system during its work and utilisation of produced data to its analyses. We call such an analysed system *Data Dependent Systems (DDS)*. It means that we do not need to know anything about composition of the system and all analysis and conclusions are made just based on the observed system output.

Data Dependent Systems are represented by sets of continuous output signals gets a series of data (values) which forms a base for description and analysis of the investigated system. The main goal is to get a possibility of system behaviour forecasting and eventually influencing its behaviour not to get the system in any unwanted state [1].

For a description of DDS, one can use *AutoRegressive Moving Average Models - ARMA models*. Their advantages are precisely formulated statistical criteria and relatively simple mathematical apparatus of statistical regressive analysis and testing of statistical hypothesis. Their disadvantages are complications of identification procedures and time-consuming computer calculations despite relatively simple mathematical apparatus. Therefore, they are suitable only for off-line dynamic systems identification and modell-

\* Bohuš Leitner, M.S.

Faculty of Special Engineering, University of Žilina, 1. mája 32 / B-27, SK-01026 Žilina, Slovakia,  
Tel.: ++421-89-7633320, 5620477, E-mail: leitner@fsi.utc.sk

hlavná aplikácia pri predpovedaní stavov dynamického systému v budúcnosti je možná iba pri systémoch stacionárnych, pri ktorých sa charakter systému s časom nemení.

V úvodnej kapitole príspevku sú uvedené základné pojmy, vzťahy a charakteristiky teórie stochastických časových postupností, ako aj súvislosti s častejšie využívaným aparátom autokorelačných funkcií a spektrálnej analýzy. Tretia kapitola je venovaná algoritmu určenia štatisticky adekvátneho modelu zadanej časovej postupnosti a podmienkam posúdenia adekvátnosti rádu ARMA modelu. Vo štvrtjej kapitole je na jednoduchšej mechanickej sústave demonštrované odvodenie súvislosti medzi parametrami diskretných a spojitých modelov a zovšeobecnenie zistených závislostí. V poslednej kapitole je stručne naznačená možnosť využitia uvedeného teoretického prístupu k určovaniu vlastných frekvencií, relatívnych tlmení a tvarov kmitov častí mechanickej konštrukcie.

## 2. Základné pojmy a vzťahy

Základnou myšlienkou autoregresného vyjadrenia diskretného stacionárneho stochastického procesu (obr. 1.) je vyjadrenie závislosti každej okamžitej hodnoty procesu  $X_t$ , nie ako funkcie času, ale ako funkcie hodnôt predchádzajúcich [2].

Najjednoduchším typom závislosti je potom lineárna závislosť okamžitých hodnôt  $X_t$  od hodnôt bezprostredne predchádzajúcich  $X_{t-1}$  typu

$$X_t = a_1 \cdot X_{t-1} + \epsilon_t, \quad (1)$$

ktorá popisuje tzv. *autoregresný model 1. rádu*, označovaný ďalej AR(1).

Skutočne, ak sa vynesie do grafu (obr. 2) závislosť  $X_t = f(X_{t-1})$  pre priebeh procesu z obr. 1, je z priebehu hodnôt zrejмый lineárny trend. To znamená, že mieru závislosti -  $a_1$  súčasných hodnôt  $X_t$  od hodnôt predchádzajúcich  $X_{t-1}$  možno určiť aplikáciou metódy najmenších štvorcov, minimalizujúcou súčet štvorcov odchýlok.

Tento prístup je možné zovšeobecniť na závislosť hodnôt  $X_t$  od predchádzajúcich  $n$  hodnôt, ktorú popisuje *autoregresný model n-tého rádu* - AR(n) v tvare:

ing and their main application - forecasting of dynamic system behaviour is suitable just for stationary systems, which do not change their parameters with time.

In the opening chapter of the paper the principal terms, relationships and characteristics of time series theory are introduced as well as some coherence to the better known apparatus of autocorrelation functions and power spectral density. The third chapter deals with an algorithm of a statistically adequate order of given time series and with conditions of tests of adequate ARMA model order. The fourth chapter shows an example of the simplest mechanical dynamic system to characterise the relationships between parameters of discrete and continuous models and their abstraction. Possibility of proposed method utilization is shown in the last chapter. It concerns mode informations as natural frequencies, relative dampings and mode structures of tested mechanical structures.

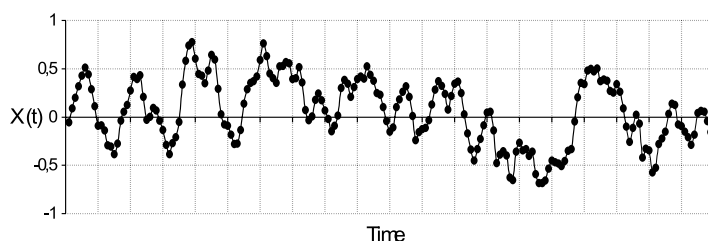
## 2. Principal conceptions and relationships

The principal idea of an autoregressive expression of a discrete stationary stochastic process (Fig. 1) is to express dependence of each immediate value of process  $X_t$ , not as a function of time but as a function of former values [2].

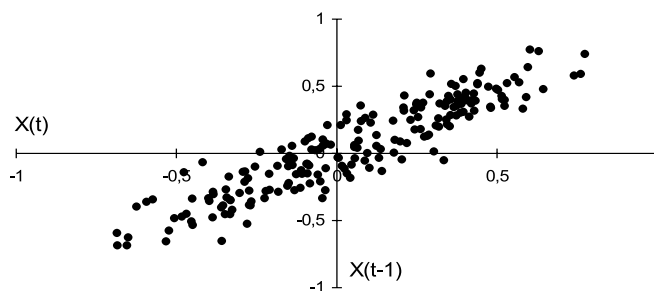
Therefore, the simplest type of dependence will be the linear dependence of immediate values  $X_t$  on immediate previous values  $X_{t-1}$  of type

$$X_t = a_1 \cdot X_{t-1} + \epsilon_t, \quad (1)$$

which describes a so called *autoregressive model of 1<sup>st</sup> order*, next signed AR(1).



Obr. 1. Príklad diskretizovaného stacionárneho stochastického procesu  
Fig. 1. An example of discrete stationary stochastic process



Obr. 2. Priebeh závislosti  $X_t = f(X_{t-1})$   
Fig. 2. The course of dependence of  $X_t = f(X_{t-1})$

Really, if one tries to express dependence (Fig. 1)  $X_t = f(X_{t-1})$  graphically jets clear linear trend (Fig. 2). It means that measure  $a_1$  of dependence of immediate values  $X_t$  a proceeding ones  $X_{t-1}$  can be determined using a linear least square procedure which minimises the sum of deviation squares.

This approach can be generalised by dependence of immediate  $X_t$  values on former  $n$  values, which can be described as *autoregressive model of n-th orders* - AR(n) as

$$X_t = a_1 \cdot X_{t-1} + a_2 \cdot X_{t-2} + \dots + a_n \cdot X_{t-n} + \epsilon_t. \quad (2)$$

Základným predpokladom pre adekvátnosť modelov AR(n) je štatistická nezávislosť náhodných odchýlok  $\epsilon_t$ , ktoré musia vytvárať nekorelovanú postupnosť. V prípade, že tento predpoklad splnený nie je a platí, že  $\epsilon_t$  je závislé od  $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$  modely čisto autoregresné prechádzajú do tzv. modelov *autoregresných s kľzavým priemerom* - ARMA(n,m). Modelmi ARMA je možné vyjadriť podstatne komplexnejší charakter vnútorných závislostí procesu a ako ukážeme v ďalšom, ich parametre majú úzky súvis s fyzikálnymi princípmi skúmaných procesov [2],[5].

Všeobecným typom ARMA závislosti je model  $n$ -tého rádu v autoregresnej časti a  $(n-1)$  rádu v časti kľzavého priemeru - ARMA(n,n-1) popísaný vzťahom

$$X_t - a_1 \cdot X_{t-1} - a_2 \cdot X_{t-2} - \dots - a_n \cdot X_{t-n} = \epsilon_t - b_1 \cdot \epsilon_{t-1} - b_2 \cdot \epsilon_{t-2} - \dots - b_{n-1} \cdot \epsilon_{t-n+1}, \quad (3)$$

pre ktorý sa predpokladá, že reziduálne odchýlky  $\epsilon_t$  majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a disperziou  $\sigma_\epsilon^2$  tzn. ( $\epsilon_t \approx N(0, \sigma_\epsilon^2)$ ).

Základnými charakteristikami ARMA modelov je *funkcia impulznej odozvy* tzv. Greenova funkcia, pomocou ktorej je možné vyjadriť podmienky stability modelov a *inverzná funkcia*, ktorá popisuje dynamiku modelu vyjadrením vplyvu minulých hodnôt procesu na súčasné [7].

Pre ich jednoduchšie vyjadrenie je výhodné zaviesť tzv. *operátor spätného posunutia B*, vo všeobecnom tvare definovaný ako

$$B \cdot X_t = X_{t-1}, \quad \text{príp.} \quad B^j \cdot X_t = X_{t-j}$$

a využitím ktorého je možné prepísať všeobecný ARMA(n,n-1) model z rovnice (3) na tvar

$$(1 - a_1 \cdot B - a_2 \cdot B^2 - \dots - a_n \cdot B^n) \cdot X_t = (1 - b_1 \cdot B - b_2 \cdot B^2 - \dots - b_{n-1} \cdot B^{n-1}) \cdot \epsilon_t. \quad (4)$$

Greenova funkcia  $G_j$  diferenčnej rovnice (4) slúži k vyjadreniu hodnôt procesu  $X_t$  ako lineárnej kombinácie odchýlok  $\epsilon_t$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \cdot \epsilon_{t-j} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} G_j \cdot B^j \right) \cdot \epsilon_t = (G_0 + G_1 \cdot B + G_2 \cdot B^2 + \dots) \cdot \epsilon_t. \quad (5)$$

Podobne možno vyjadriť  $X_t$  ako lineárnu kombináciu hodnôt predchádzajúcich. Funkciu koeficientov  $I_j$  v tomto rozklade voláme „*inverzná funkcia*“ a je definovaná ako

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} (I_j \cdot X_{t-j}) + \epsilon_t = I_1 \cdot X_{t-1} + I_2 \cdot X_{t-2} + \dots + I_q \cdot X_{t-q} + \epsilon_t, \quad \text{príp.} \quad \epsilon_t = (1 - I_1 \cdot B - I_2 \cdot B^2 - \dots) \cdot X_t \quad (6)$$

*Podmienka stability* modelu ARMA(n,n-1) je všeobecne v tvare  $|\lambda_k| < 1$ , pre  $k = 1, 2, \dots, n$  a kde  $\lambda_k$  sú korene charakteristickej rovnice ľavej strany vzťahu (3) v tvare

$$\lambda^n - a_1 \cdot \lambda^{n-1} - a_2 \cdot \lambda^{n-2} - \dots - a_n = 0. \quad (7)$$

$$X_t = a_1 \cdot X_{t-1} + a_2 \cdot X_{t-2} + \dots + a_n \cdot X_{t-n} + \epsilon_t. \quad (2)$$

The basic presumption of the adequacy of AR (n) model is the independence of stochastic values  $\epsilon_t$ , which must form an independent series. If this presumption does not apply, it means that  $\epsilon_t$  depends on  $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$  etc. The pure autoregressive models change to *Autoregressive Moving Average Models - ARMA*, generally of (n, m) order. With the use of ARMA models one can express more complex types of internal dependencies, and as it will be shown further, their parameters have a very narrow dependence on the physical principal of followed processes [2], [5].

A general type of ARMA dependence is a model of  $n$ -th order in an autoregressive part and  $(n-1)$ -th order in moving average part - ARMA (n, n-1) described by

one can suppose, that residual deviations  $\epsilon_t$  are of normal distribution of probability with zero mean and dispersion of  $\sigma_\epsilon^2$  ( $\epsilon_t \approx N(0, \sigma_\epsilon^2)$ ).

The basic characteristics of ARMA models are *impulse response function* - so called *Greens function* which can express conditions of stability of models and *inverse function* describing dynamics of models by expression of influence of former values of the process on the present ones [7].

To express it more simply we can introduce a *back shift operator B* in general mode defined as

$$B \cdot X_t = X_{t-1}, \quad \text{or} \quad B^j \cdot X_t = X_{t-j}$$

and using this the general ARMA (n, n-1) model form from equation (3) gets the form

Greens function  $G_j$  of difference equation (4) can be used to express values of  $X_t$  as a linear combination of deviations of  $\epsilon_t$  as

Similarly, the value of  $X_t$  can be expressed as a linear combination of former values. Function of coefficients  $I_j$  in this expression is called „*inverse function*“ which is defined as

*The condition of stability* of ARMA (n, n-1) is generally in form  $|\lambda_k| < 1$ , for  $k = 1, 2, \dots, n$  where  $\lambda_k$  are roots of characteristic equation on the left-hand side of equation (3) in the form of

$$\lambda^n - a_1 \cdot \lambda^{n-1} - a_2 \cdot \lambda^{n-2} - \dots - a_n = 0. \quad (7)$$

Podobne podmienka invertibility je definovaná v tvare  $|v_k| < 1$ , pre  $k = 1, 2, \dots, n-1$  a kde  $v_k$  sú korene charakteristickej rovnice pravej strany vzťahu (3) v tvare

$$v^{n-1} - b_1 \cdot v^{n-2} - \dots - b_{n-1} = 0. \quad (8)$$

Prostredníctvom Greenovej funkcie možno odvodiť implicitné vyjadrenie diskretných hodnôt autokorelačnej funkcie (AKF) všeobecného ARMA(n,n-1) modelu v tvare [3], [5]

$$\begin{aligned} R_0 &= a_1 \cdot R_1 + a_2 \cdot R_2 + \dots + a_n \cdot R_n + (1 - b_1 \cdot G_1 - b_2 \cdot G_2 - \dots - b_{n-1} \cdot G_{n-1}) \cdot \sigma_\epsilon^2 \\ R_0 &= a_1 \cdot R_0 + a_2 \cdot R_1 + \dots + a_n \cdot R_{n-1} + (-b_1 - b_2 \cdot G_2 - \dots - b_{n-1} \cdot G_{n-1}) \cdot \sigma_\epsilon^2 \\ &\vdots \\ R_{n-1} &= a_1 \cdot R_{n-2} + a_2 \cdot R_{n-3} + \dots + a_n \cdot R_1 - b_{n-1} \cdot \sigma_\epsilon^2 \\ R_k &= a_1 \cdot R_{k-1} + a_2 \cdot R_{k-2} + \dots + a_n \cdot R_{k-n} \end{aligned} \quad \text{for } k \geq n \quad (9)$$

Spektrálnu výkonovú hustotu (SVH) potom možno určiť známym spôsobom ako Fourierovu transformáciu AKF, alebo jednoduchším spôsobom priamo zo vzťahu [4]

$$S(\omega) = \sigma_\epsilon^2 \cdot \frac{(\epsilon^{i \cdot (n-1)} \cdot \omega - b_1 \cdot \epsilon^{i \cdot (n-2)} \cdot \omega - \dots - b_{n-1})^2}{(\epsilon^{i \cdot n} \cdot \omega - a_1 \cdot \epsilon^{i \cdot (n-1)} \cdot \omega - \dots - a_n)^2}, \quad (10)$$

ktorý platí pre  $\omega$  v intervale  $[(-\pi/\Delta t) \leq \omega \leq (+\pi/\Delta t)]$ , kde  $\Delta t$  je interval vzorkovania.

Vhodnejší odhad spektra cez celé frekvenčné pásmo je taktiež možné získať z modelu spojitého, ako je ukázané napr. v [5].

### 3. Algoritmus určenia štatisticky adekvátneho diskretného modelu

V súlade so závermi predchádzajúcej kapitoly je možné si za cieľ identifikácie stanoviť určenie rádu  $n$  štatisticky adekvátneho modelu ARMA (n, n-1), výpočet koeficientov ľavej a pravej strany rovnice ( $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ ) a súčet štvorcov reziduálnych odchýlok  $\sum \epsilon_t^2$  príp. ich rozptylu  $\sigma_\epsilon^2$ .

Vzhľadom na potrebu rekurentného určovania odchýlok  $\epsilon_t$  od počiatku je výsledný vzťah z hľadiska koeficientov nelineárny a preto je potrebné k ich určeniu aplikovať *nelineárnu metódu najmenších štvorcov*, založenú na niektorom z iteračných postupov určenia minima súčtu štvorcov odchýlok. Zvláštny prípad identifikácie tvoria čisto autoregresné modely typu AR(n), pretože pre určenie ich parametrov je vhodná *lineárna metóda najmenších štvorcov*. Hľadaný vektor koeficientov  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  autoregresného modelu AR(n) sa určí ako riešenie sústavy rovníc

$$S \cdot a = T, \quad (11)$$

kde  $S = X^T \cdot X$  a  $T = X^T \cdot Y$ , pričom

$$X = \begin{bmatrix} X_n & X_{n-1} & \dots & X_1 \\ X_{n+1} & X_n & \dots & X_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N-1} & X_{N-2} & \dots & X_{N-n} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix},$$

Similarly, we can define a condition of invertibility in form  $|v_k| < 1$ , for  $k = 1, 2, \dots, n-1$  where  $v_k$  are roots of characteristic equation on the right-hand side of relationship (3) in form of

$$v^{n-1} - b_1 \cdot v^{n-2} - \dots - b_{n-1} = 0. \quad (8)$$

Using Greens function one can develop an implicit expression of discrete values of autocorrelation function (ACF), which becomes the form [3], [5] of

Power spectral density (PSD) can be determined using Fourier transform of ACF or in a simpler way, directly [4] from the formula

$$S(\omega) = \sigma_\epsilon^2 \cdot \frac{(\epsilon^{i \cdot (n-1)} \cdot \omega - b_1 \cdot \epsilon^{i \cdot (n-2)} \cdot \omega - \dots - b_{n-1})^2}{(\epsilon^{i \cdot n} \cdot \omega - a_1 \cdot \epsilon^{i \cdot (n-1)} \cdot \omega - \dots - a_n)^2}, \quad (10)$$

which holds for  $\omega$  in interval  $[(-\pi/\Delta t) \leq \omega \leq (+\pi/\Delta t)]$ , where  $\Delta t$  is a sampling interval.

One can get a better estimate of power spectra through the whole frequency band from continues model as it is shown in [5].

### 3. Algorithm of statistically adequate discrete model determination

As indicated in the former chapter, the aim of identification is to determine order  $n$  of statistically adequate model ARMA (n, n-1), coefficients on the left and right-hand side ( $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ ) and sum of squares of residual deviations  $\sum \epsilon_t^2$  (or their dispersion  $\sigma_\epsilon^2$ ).

Because of the necessity of recurrent determination of deviations  $\epsilon_t$  from the start, the result is from the point of view of non-linear coefficients. It is necessary to apply a non-linear least square procedure looking in interactive steps for the minimum of sum of squares. A special case of identification, therefore, forms pure autoregressive models of  $n$ -th orders AR(n) because determination of its parameters a linear least squares procedure is suitable.

One gets the searched vector of coefficients  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  of AR(n) model as a solution of matrix equation

$$S \cdot a = T, \quad (11)$$

where  $S = X^T \cdot X$  and  $T = X^T \cdot Y$ , while

$$X = \begin{bmatrix} X_n & X_{n-1} & \dots & X_1 \\ X_{n+1} & X_n & \dots & X_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N-1} & X_{N-2} & \dots & X_{N-n} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix},$$

kde  $N$  je počet hodnôt postupnosti. Hľadaný rozptyl  $\sigma_\epsilon^2$  sa potom určí pomocou výrazu

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{N-n} \cdot \sum_{t=n+1}^N (X_t - a_1 \cdot X_{t-1} - a_2 \cdot X_{t-2} - \dots - a_n \cdot X_{t-n})^2 = \frac{1}{(N-n)} \sum_{t=n+1}^N \epsilon_t^2. \quad (12)$$

Ďalší postup pri identifikácii, tzn. určenie optimálneho rádu  $n$  modelu AR( $n$ ), je potom analogický ako pri všeobecných modeloch ARMA ( $n, n-1$ ) a je popísaný v ďalšom, príp. v [4].

### 3.1 Určenie počiatočného odhadu parametrov

Hlavným problémom pri riešení efektívneho algoritmu identifikácie modelu ARMA ( $n, n-1$ ) je počiatočný odhad parametrov modelu  $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{(0)}, (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^{(0)}$  tak, aby bola zabezpečená konvergencia použitej iteračnej metódy ich spresňovania a aby potrebný počet iteračných krokov nebol príliš vysoký.

Z viacerých preverovaných metód [5] sa najefektívnejšou ukázala metóda založená na vyjadrení inverznej funkcie. Vzťahy pre vektory koeficientov sú lineárne pre každý typ modelu ARMA ( $n, n-1$ ). Ak teda vyjadríme všeobecný model ARMA ( $n, n-1$ ) v operátorovom tvare (4) a za  $\epsilon_t$  dosadíme v súlade s definíciou inverznej funkcie  $\epsilon_t = (1 - I_1 \cdot B - I_2 \cdot B^2 - \dots) \cdot X_t$ , potom z rovnosti operátorov vyplýva sústava rovníc

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + I_1 \\ a_2 &= b_2 - b_1 \cdot I_1 + I_2 \\ a_3 &= b_3 - b_1 \cdot I_2 + b_2 \cdot I_1 + I_3 \\ &\vdots \\ a_j &= b_j - b_1 \cdot I_{j-1} + b_2 \cdot I_{j-2} + \dots + b_{j-1} \cdot I_1 + I_j \end{aligned} \quad (13)$$

pre všetky  $j$  a za predpokladu, že  $b_j = 0$  pre ( $j > n-1$ ) a  $a_j = 0$  pre ( $j > n$ ) pre model ARMA( $n, n-1$ ). Pre ( $j > n$ ) potom platí vzťah

$$(1 - b_1 \cdot B - b_2 \cdot B^2 - \dots - b_{n-1} \cdot B^{n-1}) \cdot I_j = 0. \quad (14)$$

Z toho vyplýva, že z rovníc (13) a (14) je možné určiť parametre  $a_j$  a  $b_j$ , ak sú známe hodnoty inverzných funkcií  $I_j$ . K ich určeniu je možné využiť čistý autoregresný model, pre ktorý zo sústavy rovníc (13) platí  $I_j = a_j$ , pre  $j = 1, 2, \dots, p$  a  $I_j = 0$ , pre  $j > p$ .

Postup určenia počiatočného odhadu parametrov  $a, b$  všeobecného ARMA( $n, n-1$ ) modelu je potom nasledovný:

- určenie parametrov  $a_j$  modelu AR( $p$ ) pre  $p = 2 \cdot n - 1$  a tým aj hodnôt inverzných funkcií  $I_1, I_2, \dots, I_{2n-1}$ ,
- určenie vektora parametrov kľzavého priemeru  $b_j$  zo sústavy lineárnych rovníc získaných rozpísaním rovnice (14) pre  $j = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ ,
- určenie vektora autoregresných parametrov  $a_j$  dosadením za parametre kľzavého priemeru  $b_j$  do sústavy rovníc (13).

### 3.2 Kritérium adekvátnosti modelu ARMA ( $n, n-1$ )

Na posúdenie adekvátnosti zvoleného rádu  $n$  ARMA modelu (príp. AR modelu) bol zvolený postup *štatistického testovania*

where  $N$  is length of time series. Searched dispersion  $\sigma_\epsilon^2$  can be found as

Further steps in an identification procedure (determination of an optimum order  $n$  of AR( $n$ ) model) are similar to that of general ARMA( $n, n-1$ ) model, which is shown in the next chapter or in [4].

### 3.1 Determination of starting guess of parameters

The problem in the solution of effective identification algorithm of ARMA ( $n, n-1$ ) model is the guessing of  $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{(0)}, (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^{(0)}$  values to ensure convergence of the used iterative method and not too big a number of iterative steps.

Far best of the tested methods [5] is the one based on expression of the inverse function. These formulas are then linear for each type of ARMA ( $n, n-1$ ) model. Using general ARMA ( $n, n-1$ ) in operator form (4) and for  $\epsilon_t$ 's giving such a definition of inverse function  $\epsilon_t = (1 - I_1 \cdot B - I_2 \cdot B^2 - \dots) \cdot X_t$ , comparing values by same powers of operators one gets system of equations as

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + I_1 \\ a_2 &= b_2 - b_1 \cdot I_1 + I_2 \\ a_3 &= b_3 - b_1 \cdot I_2 + b_2 \cdot I_1 + I_3 \\ &\vdots \\ a_j &= b_j - b_1 \cdot I_{j-1} + b_2 \cdot I_{j-2} + \dots + b_{j-1} \cdot I_1 + I_j \end{aligned} \quad (13)$$

which holds for each  $j$ , knowing, that  $b_j = 0$  for ( $j > n-1$ ) and  $a_j = 0$  for ( $j > n$ ) for ARMA ( $n, n-1$ ) model. Then for ( $j > n$ ) is

$$(1 - b_1 \cdot B - b_2 \cdot B^2 - \dots - b_{n-1} \cdot B^{n-1}) \cdot I_j = 0. \quad (14)$$

It means that from equations (13) and (14) it is possible that parameters  $a_j$  and  $b_j$  one can determine knowing values of inverse functions  $I_j$ . To solve the pure autoregressive model AR ( $p$ ) can be used for a system of equations (13) is  $I_j = a_j$ , for  $j = 1, 2, \dots, p$  and  $I_j = 0$  for ( $j > p$ ).

Procedure of an initial guess of parameters  $a_j, b_j$  of general ARMA ( $n, n-1$ ) model is then as follows:

- Solutions of parameters  $a_j$  of an AR( $p$ ) model where  $p = 2 \cdot n - 1$  and values of inverse functions  $I_j$  simultaneously.
- Determination of moving average parameters  $b_j$  by solving set of linear equations using equation (14) for  $j = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ .
- Determination of autoregressive parameters  $a_j$  using set of equations (13) and then parameters  $b_j$ .

### 3.2 Criterion of ARMA ( $n, n-1$ ) model adequacy

To judge adequacy of chooses order  $n$  of ARMA ( $n, n-1$ ) model (eventually AR( $n$ ) model) the procedure of *statistical hypothesis testing* was used. The test of model adequacy is in a principle the test of statistical independence of deviations  $\epsilon_t$ .

*hypotéz.* V princípe spočíva kontrola adekvátnosti modelu na testovaní štatistickej nezávislosti odchýlok  $\epsilon_t$ .

Zvolený bol štandardný F-test štatistickej významnosti rozdielu medzi dvoma výberovými rozptylmi, upravený ako test štatistickej významnosti poklesu súčtu štvorcov odchýlok. Ak sa má určiť, či u regresného modelu, ktorý má  $r$  parametrov, môže  $s$  z nich byť považovaných za nulové pri  $N$  pozorovaniach, testovacie kritérium je v tvare

$$F = \frac{\frac{A_0 - A_1}{s}}{\frac{A_1}{N-r}}, \quad (15)$$

kde  $A_1$  je súčet štvorcov odchýlok vyššieho rádu modelu a  $A_0$  je súčet štvorcov odchýlok modelu pôvodného.

Vypočítaná hodnota  $F$  sa porovná s hodnotou  $F_{krit}$  určenou z tabuliek F - rozdelenia pre  $(N-r)$  a  $s$  stupňov voľnosti a zvolenú hladinu významnosti (obvykle 95 %). Ak platí, že  $F > F_{krit}(s, N-r)_{0,95}$ , potom pokles súčtu štvorcov odchýlok pri prechode z modelu nižšieho na vyšší, bol štatisticky významný a pôvodný model nebol vhodný. Naopak, ak platí, že  $F < F_{krit}(s, N-r)_{0,95}$ , potom pôvodný model bol štatisticky adekvátny na danej hladine významnosti a prechodom na vyšší model sa nedosiahne zlepšenie výsledkov [5].

### 3.3 Algoritmus určenia optimálneho modelu

Využitím vyššie uvedených závislostí a vzťahov možno algoritmus určenia optimálneho modelu ARMA (n,n-1) popísať nasledovne [5]:

1. Určenie parametrov modelu ARMA (2n,2n-1) pre  $n = 1$  a súčtu štvorcov odchýlok  $A_0 = \sum \epsilon_t^2$ .
2. Zvýšenie rádu  $n$  o jednu a opätovné určenie parametrov modelu ARMA (2n,2n-1) a jeho súčtu štvorcov odchýlok  $A_1$ .
3. Testovanie významnosti poklesu súčtu štvorcov odchýlok  $\Delta A = A_0 - A_1$ . V prípade, ak je pokles štatisticky významný, pokračuje sa bodom 2, ak nie - štatisticky adekvátny bol model pôvodný.
4. Kontrola parametrov  $a_{2n}$ ,  $b_{2n-1}$ , či je ich hodnota blízka nule, príp., či ich interval spoľahlivosti obsahuje nulu. Ak nie, model ARMA (2n, 2n-1) je vhodný.
5. Ak  $a_{2n}$ ,  $b_{2n-1}$  sú nulové alebo blízke 0, určenie parametrov modelu ARMA (2n-1, 2n-2).
6. Kontrola parametrov  $b_i$  kľzavého priemeru modelu ARMA (2n-1, 2n-2) a ak sú niektoré z nich blízke nule, vytvorenie modelu ARMA (2n-1,m) pre  $m < (2n-2)$  a určenie jeho parametrov až po najnižší možný počet, príp. čistý AR (2n-1) model.

Uvedený algoritmus bol využitý aj pri spracovaní programu ARMAGET pre Windows 95/NT, ktorý bol vytvorený na pracovisku autora. Uvedený softvér je 32 bitová aplikácia vytvorená vo vývojovom prostredí DELPHI a pracujúca pod operačným systémom Windows 95 alebo NT.

Obsahuje užívateľské menu, ktoré okrem základných funkcií so súborom, konfiguračných nastavení, práce s oknami a funkciami

The standard F-test of statistical significance of two sample differences was chosen and this test was modified as a test of a statistically significant decrease of the sum of squares. If one has to specify when a regressive model with  $r$  parameters can be  $s$  of them counted as zero having  $N$  observations, the test criterion becomes form as

$$F = \frac{\frac{A_0 - A_1}{s}}{\frac{A_1}{N-r}}, \quad (15)$$

where  $A_1$  is sum of squares of higher order model,  $A_0$  sum of squares of initial model.

Resulting value of  $F$  is to be compared to value of  $F_{krit}$  found in the table of critical values of F - distribution for  $(N-r)$  and  $s$  degrees of freedom and chosen level of probability (mostly 95 %). When we get that  $F > F_{krit}(s, N-r)_{0,95}$  then decrease the sum of squares during a change to higher order model was statistically significant and the initial model was not suitable. On the other hand, if  $F < F_{krit}(s, N-r)_{0,95}$ , the initial model was statistically adequate, then an increase of its order does not make sense [5].

### 3.3 An algorithm of optimum model determination

Using former shown dependencies and formulas one can describe an optimum ARMA (n, n-1) model getting algorithm, in other words, as follows [5]:

1. Calculation of ARMA (2n,2n-1) model parameters for  $n = 1$  and its sum of squares  $A_0 = \sum \epsilon_t^2$ .
2. Increase the order  $n \rightarrow (n+1)$  and calculation of model parameters and sum of squares  $A_1$ .
3. Testing the statistical significance of the sum of squares decrease  $\Delta A = A_0 - A_1$ . In case that decrease is statistically significant, go to 2. In the other case the former model was statistical adequate.
4. Test of  $a_{2n}$ ,  $b_{2n-1}$  parameters if their value is near zero or if their interval of confidence contains zero. If not, then ARMA (2n, 2n-1) model is suitable.
5. When  $a_{2n}$ ,  $b_{2n-1}$  are zeros or near zero, calculation of ARMA (2n-1, 2n-2) model parameters.
6. Testing of moving average parameters  $b_j$  of ARMA (2n-1, 2n-2) model. If some of them are near zero, construction of ARMA (2n-1,m) model for  $m < (2n-2)$  and calculation of its parameters eventually of pure AR (2n-1) model.

Shown algorithm was used by developing of program ARMAGET for Windows 95/NT, this was developed on authors department. Presented software is a 32-bit application made in developing surroundings of DELPHI and working in the operating system Windows 95 or NT. It contains users menu, which apart from basic functions with file, configurations, work with windows and help functions contains two submenus - submenu of "Simulation" and submenu of "Identification" (Fig. 3).

nápovedy obsahuje dve sub-menu - submenu „*Simulácia*“ a submenu „*Identifikácia*“ (obr. 3).

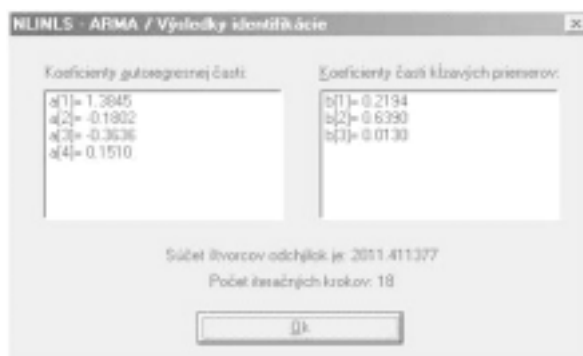
Položka „*Simulácia*“ umožňuje úpravy a konvertovanie nekompatibilného súboru vstupných hodnôt postupnosti na súbor kompatibilný a simuláciu (vygenerovanie) časovej postupnosti na základe zadania rádu a parametrov AR(n) alebo ARMA(n,n-1) modelu s možnosťou voľby strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky simulovanej postupnosti.

Jadrom programu je submenu „*Identifikácia*“, prostredníctvom ktorého je možné vykonať výber metódy a spôsobu identifikácie zvolenej časovej postupnosti, pričom je možné k identifikácii použiť adaptívne algoritmy alebo vykonať identifikáciu pomocou nelineárnej metódy najmenších štvorcov. Identifikácia pomocou vyššie spomínanej nelineárnej (resp. pre modely AR - lineárnej) metódy najmenších štvorcov je prístupná v položke menu - *Identifikácia* a jej submenu - *NLINLS*. Tu sú v ponuke 4 možnosti.

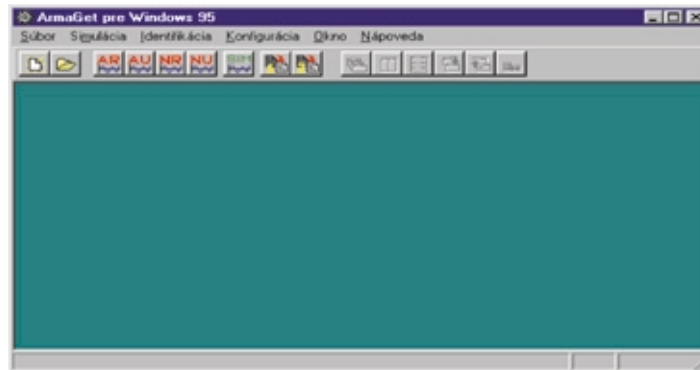
Prvé dve - *Model AR - po rádoch* a *Model AR - úplný výpočet* ponúkajú ako výsledok identifikácie model AR popísaný rovnicou (2).

Ďalšia položka - *Model ARMA - po rádoch*, umožňuje určiť koeficienty pre vopred zvolený rád modelu ARMA(n,n-1). To znamená, že je potrebné vopred určiť požadovaný rád (poznať počet koeficientov) autoregresnej časti -  $a_k$  a časti kľzavých priemerov -  $b_k$ , ktoré v podstate vyjadrujú na koľkých predchádzajúcich hodnotách je práve počítaná hodnota časovej postupnosti závislá.

Počiatočný odhad koeficientov modelu ARMA(n,n-1) sa určí tak, že koeficientom časti kľzavých priemerov je priradená hodnota 0 a koeficienty autoregresnej časti sa určujú aplikáciou lineárnej metódy najmenších štvorcov. Súčasne je vypočítaný aj súčet štvorcov odchýlok, tzn. hodnota vyjadrujúca odchýlku teoretického modelu od modelu skutočného. Potom nasleduje samotný iteračný výpočet, ktorého výstupom sú koeficienty zvoleného modelu (obr. 4).



Obr. 4. Výsledky identifikácie  
Fig. 4. Results of identification



Obr. 3. Prostredie programu ARMAGET pre Windows  
Fig. 3. The Integrated Environment of ARMAGET for Windows

Item “*Simulation*” enables adjustment and conversion of incompatible input files of time series to compatible ones and simulation (generation) of time series basing on given AR or ARMA models order and parameters with possibilities of mean and dispersion selection of simulated series.

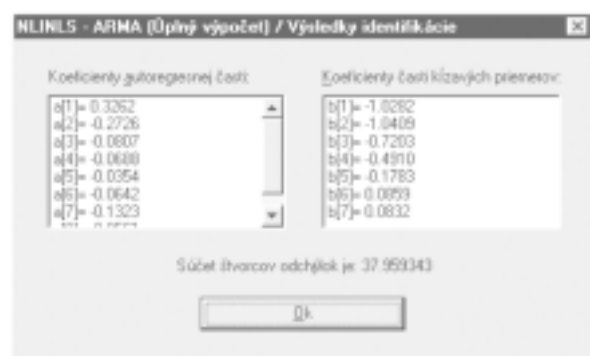
The heart of the program is submenu

“*Identification*”, by means of which it is possible to make selection of the identification method and way of chosen time series, whereupon it is possible to use either adaptive algorithm of time series identification or make identification using non-linear least squares method. Identification by means of higher presented non-linear (respectively for AR models - linear) least square method is available in item *Identification* and its sub-menu *NLINLS*. Here are four options.

First two- *Model AR - after orders* and *Model AR- complete calculation* give results as identification AR model, described by (2).

Next item - *Model ARMA- after orders* gives coefficients beforehand of selected order of ARMA (n, n-1) models determination. It means, that it is necessary beforehand to determine required order (known number of coefficients) of autoregressive part -  $a_k$  and moving average part -  $b_k$  which principally determine number of former values the calculated value depends on. The initial guess is of ARMA (n, n-1) model coefficients is determined in the following way: a zero value is assigned to coefficients of moving average part and coefficients of autoregressive part are determined by the linear least square method.

Simultaneously the sum of squares of deviations value expressing deviation of theoretical model from real model is calculated. Then the proper iterative calculation follows, which outputs are the coefficients of model (Fig. 4).



Obr. 5. Výsledky určenia rádu a koeficientov optimálneho modelu  
Fig. 5. Results of an optimal ARMA model determination

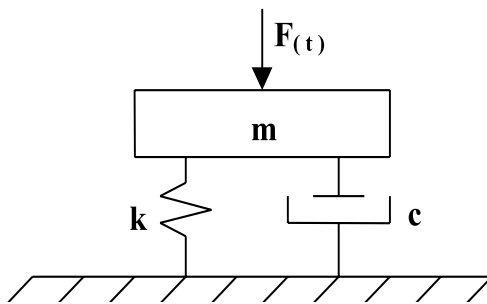
Poslednou dôležitou položkou je položka *Model ARMA - úplný výpočet*, ktorej úlohou je nájsť optimálny model ARMA (n,n-1), ktorý najlepšie popisuje stochastický systém charakterizovaný časovou postupnosťou. Pretože vo väčšine prípadov nepoznáme optimálny rád modelu je potrebné, aby program iteračným postupom určil rád modelu, ktorý je pre popis daného systému optimálny (obr. 5). Algoritmus hľadania optimálneho autoregresného modelu použitý v programe zodpovedá algoritmu z časti 3.3.

#### 4. Súvis medzi spojítym a diskretným modelom

Pretože väčšina systémov, s ktorými sa pracuje v technickej praxi a najmä v dynamike mechanických systémov je spojítym, je pre tieto systémy spojítym matematický model v tvare diferenciálnej rovnice príp. systému diferenciálnych rovníc výhodnejší ako model diskretný. Diferenciálne rovnice sú zostavené z fyzikálnych zákonitostí systémov a ich parametre majú bezpros-tredný súvis s najdôležitejšími charakteristikami systémov (vlastné frekvencie, tlmenie, stabilita atď.).

V praxi však túto skutočnosť nie je väčšinou možné využiť, pretože numerické riešenie väčších sústav diferenciálnych rovníc je náročné na čas i výkon počítača a tak simulácia činnosti systému trvá väčšinou dlhšie, ako činnosť reálna [4], [5], [6].

Súvis medzi diskretným modelom, ktorý vznikne vzorkovaním spojitého signálu v konštantných časových intervaloch a pôvodným systémom spojítym, t. j. relácia medzi parametrami diferenčnej a diferenciálnej rovnice popisujúcej ten istý stochastický dynamický systém, bude dokázaný na jednoduchej 1-hmotovej mechanickej dynamickej sústave (obr. 6), budenej náhodnou silou  $F(t)$  s normálnym rozdelením  $N(0, \sigma_F^2)$ .



Obr. 6. Jednoduchá jednhmotová mechanickej dynamickej sústava

Fig.6. The simple mechanical dynamic system

Známu diferenciálnu rovnicu v tvare

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x(t) = F(t), \quad (16)$$

alebo po úprave

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \Omega \cdot \frac{dx}{dt} + \Omega^2 \cdot x(t) = \frac{F(t)}{m},$$

je možné previesť na tzv. operátorový tvar [5]

$$(D^2 + \alpha_1 \cdot D + \alpha_0) \cdot x(t) = Z(t). \quad (17)$$

Uvedená rovnica popisuje *spojitý autoregresný model 2. rádu - SAR(2)* a budiaca funkcia  $Z(t)$  sa predpokladá vo forme spojitého bieleho šumu, pre ktorý platí  $E[Z(t)] = 0$  a  $E[Z(t) \cdot Z(t+n)] = \sigma_Z^2 \cdot \delta(n)$ , kde  $\delta(n)$  je Diracova  $\delta$ -funkcia.

The last important item is *Model ARMA- complete calculation*, whose aim is to find an optimal ARMA (n, n-1) model. This model is the best description of stochastic system, whose output is a time series. Because, in most cases we don't know optimal order of model, it is necessary beforehand to determine by an iterative procedure of an optimal order of model for description of a given system (Fig. 5). An algorithm of optimum autoregressive model determination used in ARMAGET is identical as algorithm from chapter 3.3.

#### 4. Relationship between continuous and discrete models

Because most systems used in technical practice and dynamics of mechanical systems are of continuous nature, continuous mathematical model in form of differential equation eventually of differential equations set is more suitable as the discrete one. Because differential equations are formed on base of physical laws concerning studied systems and their parameters (coefficients) have a straightway relationship to the most important characteristics of systems (such a natural frequencies, damping, stability, etc.).

In practice, it is not possible to utilise this fact because a numerical solution of large differential equation systems is time consuming and needs very powerful computers so that simulation of system performance lasts longer as a real function [4], [5], [6].

Relationships between a discrete model, which one gets by sampling of continuous signal in constant time interval and an original continuous system, means relationships between parameters of differential and difference equations describing the same dynamic stochastic system, will be developed on the simplest one-mass damped mechanical dynamic system (1-D.O.F - one degree of freedom) after Fig. 6 excited by stochastic force  $F(t)$  with normal distribution  $N(0, \sigma_F^2)$ .

Well-known differential equation in form

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x(t) = F(t), \quad (16)$$

or after adjustment

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \Omega \cdot \frac{dx}{dt} + \Omega^2 \cdot x(t) = \frac{F(t)}{m},$$

is possible to simply arrange into so called operator form as

$$(D^2 + \alpha_1 \cdot D + \alpha_0) \cdot x(t) = Z(t). \quad (17)$$

This equation described *continuous autoregressive model of second order - CAR(2)* and exciting functions  $Z(t)$  is in continuous white noise form, for which applied  $E[Z(t)] = 0$  and  $E[Z(t) \cdot Z(t+n)] = \sigma_Z^2 \cdot \delta(n)$ , where  $\delta(n)$  is Diracs  $\delta$ -function.

Hodnoty  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  predstavujú dôležité hodnoty netlmenej vlastnej frekvencie a pomerného tlmenia sústavy a možno ich získať pomocou vzťahov

$$\alpha_1 = 2 \cdot \xi \cdot \Omega \quad \text{a} \quad \alpha_0 = \Omega^2,$$

pričom

$$\xi = \frac{c}{c_{krit}} = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}} \quad \text{a} \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pre riešenie je rozhodujúci tvar funkcie impulznej odozvy, ktorý je možné s využitím vlastnosti Diracovej  $\delta$ -funkcie určiť ako

$$G(t) = \frac{e^{\mu_1 \cdot t} - e^{\mu_2 \cdot t}}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \text{pre } t \geq 0 \quad (18)$$

kde  $\mu_1$  a  $\mu_2$  sú korene charakteristickej rovnice vzťahu (17).

Súvis medzi spojitým a diskretným modelom je možné potom určiť z porovnania tvaru autokorelačnej funkcie pre spojitý a diskretizovaný model.

Autokorelačná funkcia spojitého modelu je podľa definície [4]

$$R(s) = \sigma_Z^2 \int_0^\infty G(v) \cdot G(v+s) dv = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} (\mu_2 \cdot e^{\mu_1 \cdot s} - \mu_1 \cdot e^{\mu_2 \cdot s}) \quad (19)$$

Po dosadení  $s = k \cdot \Delta t$  pre diskretizovaný spojitý model má AKF tvar

$$R_k = R(k \cdot \Delta t) = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} (\mu_2 \cdot e^{\mu_1 \cdot k \cdot \Delta t} - \mu_1 \cdot e^{\mu_2 \cdot k \cdot \Delta t}) = d_1 \cdot \lambda_1^k + d_2 \cdot \lambda_2^k, \quad (20)$$

kde

$$d_1 = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad d_2 = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad \lambda_1 = e^{\mu_1 \cdot \Delta t} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = e^{\mu_2 \cdot \Delta t}. \quad (21)$$

Z tvaru AKF, ktorá je lineárnou kombináciou dvoch exponenciálnych funkcií vyplýva, že spojitý systém 2. rádu môže byť pri vzorkovaní s konštantným krokom  $\Delta t$  vyjadrený diferenčnou rovnicou modelu ARMA (2,1) v tvare

$$X_t - a_1 \cdot X_{t-1} - a_2 \cdot X_{t-2} = \epsilon_t - b_1 \cdot \epsilon_{t-1}, \quad (22)$$

kde

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\mu_1 \cdot \Delta t} + e^{\mu_2 \cdot \Delta t} \quad \text{a} \quad a_2 = -\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -e^{(\mu_1 + \mu_2) \cdot \Delta t}.$$

Parametre  $b_1$  a  $\sigma_Z^2$  sú tiež funkciou koreňov charakteristickej rovnice, ale ich vyjadrenie je podstatne zložitejšie [5].

Vychádza sa z predpokladu, že spojitý a diskretný model majú rovnakú AKF. Z toho vyplýva, že si musia odpovedať nielen charakteristické čísla, ale tiež koeficienty  $d_1$  a  $d_2$  AKF. Z ich vyjadrenia je možné získať sústavu dvoch rovníc v tvare [5]

$$\frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \cdot (\lambda_1 - b_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left( \frac{\lambda_1 - b_1}{1 - \lambda_1^2} - \frac{\lambda_2 - b_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \right)$$

The values  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ , representing important values of undamped natural frequency and relative damping of the system, can be obtained by

$$\alpha_1 = 2 \cdot \xi \cdot \Omega \quad \text{and} \quad \alpha_0 = \Omega^2,$$

while

$$\xi = \frac{c}{c_{krit}} = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}} \quad \text{and} \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

For the solution, the decisive form of impulse response function that is possible to determine uses characteristics of Diracs  $\delta$ -function as

$$G(t) = \frac{e^{\mu_1 \cdot t} - e^{\mu_2 \cdot t}}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \text{for } t \geq 0 \quad (18)$$

where  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are roots of the characteristics equation of formula (17). Relationship between continuous and discrete models can be determined using comparisons of Autocorrelation Function (ACF) forms for continuous and discrete models.

Auto Correlation function of continuous model is after definition [4]

$$R(s) = \sigma_Z^2 \int_0^\infty G(v) \cdot G(v+s) dv = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} (\mu_2 \cdot e^{\mu_1 \cdot s} - \mu_1 \cdot e^{\mu_2 \cdot s}) \quad (19)$$

After giving  $s = k \cdot \Delta t$  for uniformly sampled continuous model ACF becomes form as

$$R_k = R(k \cdot \Delta t) = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} (\mu_2 \cdot e^{\mu_1 \cdot k \cdot \Delta t} - \mu_1 \cdot e^{\mu_2 \cdot k \cdot \Delta t}) = d_1 \cdot \lambda_1^k + d_2 \cdot \lambda_2^k, \quad (20)$$

where

$$d_1 = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad d_2 = \frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad \lambda_1 = e^{\mu_1 \cdot \Delta t} \quad \text{and} \quad \lambda_2 = e^{\mu_2 \cdot \Delta t}. \quad (21)$$

Using the ACF form, which is a linear combination of two exponential functions, one knows that a continuous second order system can be (by constant interval sampling) expressed by a difference equation of ARMA (2,1) model in form

$$X_t - a_1 \cdot X_{t-1} - a_2 \cdot X_{t-2} = \epsilon_t - b_1 \cdot \epsilon_{t-1}, \quad (22)$$

where

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\mu_1 \cdot \Delta t} + e^{\mu_2 \cdot \Delta t} \quad \text{and} \quad a_2 = -\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -e^{(\mu_1 + \mu_2) \cdot \Delta t}.$$

Parameters of  $b_1$  and  $\sigma_Z^2$  are functions of characteristic equation roots, but their expression is considerably complicated[5].

The basic assumption is the continuous and discrete models have the same ACF. From this follows that they must correspond not only eigenvalues but the coefficients of  $d_1$  and  $d_2$  of ACF too. From expression of them, one can get a system of two equations in form

$$\frac{\sigma_Z^2}{2 \cdot \mu_1 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \cdot (\lambda_1 - b_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left( \frac{\lambda_1 - b_1}{1 - \lambda_1^2} - \frac{\lambda_2 - b_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \right)$$

$$-\frac{\sigma_z^2}{2 \cdot \mu_2 \cdot (\mu_1^2 - \mu_2^2)} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \cdot (\lambda_2 - b_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left( \frac{\lambda_2 - b_1}{1 - \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1 - b_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \right), \quad (23)$$

ktoré implicitne obsahujú hľadané parametre pravej strany diferenciálnej rovnice (22)  $b_1$  a  $\sigma_\epsilon$ .

Vzájomným vydelením oboch rovníc a úpravami je možné zistiť pre  $b_1$  výraz v tvare

$$b_1 = -P \pm \sqrt{P^2 - 1} \quad (24)$$

kde

$$P = \frac{-\mu_1 \cdot (1 + \lambda_1^2) \cdot (1 - \lambda_2^2) + \mu_2 \cdot (1 + \lambda_2^2) \cdot (1 - \lambda_1^2)}{2 \cdot [\mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_2^2) - \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot (1 - \lambda_1^2)]}.$$

Pritom z dvoch určených hodnôt  $b_1$  sa berie tá, ktorá spĺňa podmienku invertibility, tzn. pre ktorú platí  $|b_1| < 1$ . Obdobne je možné aj vyjadrenie hľadaného rozptylu [5]. Vzťahy (22) a (23) určujú jednoznačne parametre diskretného autoregresného modelu ARMA (2,1) zo známych parametrov modelu spojitého.

Skutočný postup pri identifikácii je však opačný. To znamená, že postupom uvedeným v predchádzajúcej kapitole sa určia parametre diskretného modelu  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  a  $\sigma_\epsilon^2$ , korene charakteristickej rovnice  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a prostredníctvom nich sa vyjadria parametre spojitého systému  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_z^2$ , prípadne  $\alpha_1$  a  $\alpha_0$ .

Pre jednodnotovú sústavu s podkritickým tlmením, potom pre hodnoty vlastnej frekvencie a relatívneho tlmenia platí [5]

$$\Omega = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{[\ln(-a_2)]^2}{4} + \left[ \arccos\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right) \right]^2}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln(-a_2))^2}{[\ln(-a_2)]^2 + 4 \cdot \left[ \arccos\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right) \right]^2}} \quad (25)$$

Uvedený postup je možné rozšíriť a aplikovať tiež na všeobecné spojité systémy  $n$ -tého rádu popísané napr. diferenciálnou rovnicou typu (v operátorovom tvare)

$$(D^n + \alpha_{n-1} \cdot D^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot D + \alpha_0) \cdot X_{(t)} = (\beta_m \cdot D^m + \beta_{m-1} \cdot D^{m-1} + \dots + \beta_1 \cdot D + \beta_0) \cdot Z_{(t)} \quad (26)$$

ktorá určuje *spojitý autoregresný model s kľzavým priemerom - SARMA(n,m)*.

Rovnakým spôsobom sa z vyjadrenia AKF diskretizovaného spojitého systému zistí, že zodpovedajúcim diskretným modelom je model typu ARMA (n, n-1) s parametrami

$$\lambda_i = e^{\mu_i \cdot \Delta t},$$

$$a_i = (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^n \lambda_{k1} \cdot \lambda_{k2} \dots \lambda_{kn}$$

which implicitly contains searched parameters of the right-hand side of differential equation (22)  $b_1$  and  $\sigma_\epsilon$ .

By division of both equations, one another by some modifications, one can get for  $b_1$  expression in form

$$b_1 = -P \pm \sqrt{P^2 - 1} \quad (24)$$

where

$$P = \frac{-\mu_1 \cdot (1 + \lambda_1^2) \cdot (1 - \lambda_2^2) + \mu_2 \cdot (1 + \lambda_2^2) \cdot (1 - \lambda_1^2)}{2 \cdot [\mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_2^2) - \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot (1 - \lambda_1^2)]}.$$

From two of determined values  $b_1$  we take in account this one for that holds the condition of invertibility, which mean it is  $|b_1| < 1$ . In similar way it is possible to express the searched value of dispersion too [5]. Formulas (22) and (23) determine unambiguous parameters of the discrete autoregressive model ARMA (2,1) from known continuous model parameters.

The real procedure of the identification process is a reversed one. It means that using a procedure shown in a former chapter, one determines parameters of discrete model  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  and  $\sigma_\epsilon^2$ , roots of its characteristic equation  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and with their help parameters of continuous system  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_z^2$ , eventually  $\alpha_1$  and  $\alpha_0$  are determined.

For 1-D.O.F. system with subcritical damping for values of eigenfrequency and relative damping holds

$$\Omega = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{[\ln(-a_2)]^2}{4} + \left[ \arccos\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right) \right]^2}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln(-a_2))^2}{[\ln(-a_2)]^2 + 4 \cdot \left[ \arccos\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right) \right]^2}} \quad (25)$$

The shown procedure can be expanded and applied for general continuous systems of  $n$ -th order described by differential equation as (in operator form)

which determines the *continuous autoregressive moving average model - CARMA(n, m)*.

Using the same idea from an expression of discretized continuous model ACF one gets that corresponding discrete model is ARMA (n, n-1) model with parameters

$$\lambda_i = e^{\mu_i \cdot \Delta t},$$

$$a_i = (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^n \lambda_{k1} \cdot \lambda_{k2} \dots \lambda_{kn}$$

$$b_i = \frac{\sum_{i,j=1}^n P(\mu_i) \cdot \bar{P}(\mu_j) \cdot V_i \cdot \bar{V}_j \cdot \frac{\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j - 1}{(i-j)} \cdot \sum_{k=0}^i a_k \cdot \lambda_i^{(1-k)}}{\sum_{i,j=1}^n P(\mu_i) \cdot \bar{P}(\mu_j) \cdot V \cdot \bar{V}_j \cdot \frac{\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j - 1}{(\mu_i + \bar{\mu}_j)}}$$

$$\sigma_\epsilon = \frac{\sigma_Z^2}{|V|^2} \left[ \sum_{i,j=1}^n P(\mu_i) \cdot \bar{P}(\mu_j) \cdot V_i \cdot \bar{V}_j \cdot \frac{\lambda_i \cdot \lambda_j - 1}{\mu_i + \mu_j} \right] \quad (27)$$

kde

$$V = \prod_{i,j=1}^n (\mu_i - \mu_j) \quad \text{pre } (i > j),$$

$$Vk = (-1)^{n+k} \prod_{i,j=1}^n (\mu_i - \mu_j), \text{ for } (i > j), i, j \neq k$$

a  $P(\mu_i)$  sú hodnoty charakteristického polynomu pravej strany rovnice (3) určené pre hodnoty vlastných čísel ľavej strany  $\mu_i$ .

Z toho vyplýva, že diskretná reprezentácia spojitého procesu SARMA (n,m) je vždy model typu ARMA (n,n-1). To znamená, že rád pravej strany diferenciálnej rovnice spojitého systému nemá vplyv na jeho diskretnú reprezentáciu. Uvedené vzťahy možno využiť k určeniu parametrov diskretného modelu, ak sú známe koeficienty diferenciálnej rovnice.

Predmetom nášho záujmu je však opäť prípad opačný, tzn. pri ktorom sú parametre spojitého systému neznáme a je potrebné ich určiť z diskretného modelu vzorkovaného s konštantným intervalom  $\Delta t$  a preto postačuje pri syntéze mechanických dynamických sústav s  $n$  stupňami voľnosti charakteristická rovnica ľavej strany modelu typu ARMA ( $2n, 2n - 1$ ) v tvare

$$\lambda^{2n} + \sum_{i=1}^{2n} a_i \cdot \lambda^{2n-i} = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) \cdot (\lambda - \bar{\lambda}_j) \quad (28)$$

kde  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = e^{\Delta t \cdot \Omega_j \cdot (-\xi_j \pm i \cdot \sqrt{1-\xi_j^2})}$ .

Z toho vyplýva pre vlastné frekvencie a relatívne tlmenia

$$\Omega_j = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j)]^2}{4} + \left[ \arccos\left(\frac{\lambda_j + \bar{\lambda}_j}{2 \cdot \sqrt{\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j}}\right) \right]^2} \quad (29)$$

$$\xi_j = \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j)]^2}{[\ln(\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j)]^2 + 4 \cdot \left[ \arccos\left(\frac{\lambda_j + \bar{\lambda}_j}{2 \cdot \sqrt{\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j}}\right) \right]^2}}, \quad (30)$$

čo sú podobné výrazy, aké boli odvodené v prechádzajúcom pre jednodmotový systém.

Nejednoznačnosť hodnôt funkcie  $\arccos$  v rovniciach (29), (30) spôsobuje taktiež nejednoznačnosť hodnôt  $\Omega_j$  a  $\xi_j$ . Je možné však dokázať, že ak interval diskretizácie vyhovuje Nyquistovmu teorému, t. j.

$$\frac{\Omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi} < \frac{1}{2 \cdot \Delta t}, \quad (31)$$

$$b_i = \frac{\sum_{i,j=1}^n P(\mu_i) \cdot \bar{P}(\mu_j) \cdot V_i \cdot \bar{V}_j \cdot \frac{\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j - 1}{(i-j)} \cdot \sum_{k=0}^i a_k \cdot \lambda_i^{(1-k)}}{\sum_{i,j=1}^n P(\mu_i) \cdot \bar{P}(\mu_j) \cdot V \cdot \bar{V}_j \cdot \frac{\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_j - 1}{(\mu_i + \bar{\mu}_j)}}$$

$$\sigma_\epsilon = \frac{\sigma_Z^2}{|V|^2} \left[ \sum_{i,j=1}^n P(\mu_i) \cdot \bar{P}(\mu_j) \cdot V_i \cdot \bar{V}_j \cdot \frac{\lambda_i \cdot \lambda_j - 1}{\mu_i + \mu_j} \right] \quad (27)$$

where

and  $P(\mu_i)$  are values of characteristic polynom of the right-hand side of equation (3) determined for eigenvalues of the left-hand side  $\mu_i$ .

From these results, discrete representation of continuous process - CARMA (n,m) is always ARMA(n, n-1) model type. It means, that in order for the right-hand side of differential equation of continuous system representation to have no influence on its discrete representation. These relations are possible to exploit for discrete model parameters determination if we know coefficients of differential equation.

Because the subject of our interest is again a reverse one it means continuous parameters are determined from a discrete uniform sampled model with interval of sampling  $\Delta t$  the characteristic equation of the left-hand side of ARMA ( $2n, 2n - 1$ ) model is sufficient for mechanical systems synthesis in form

$$\lambda^{2n} + \sum_{i=1}^{2n} a_i \cdot \lambda^{2n-i} = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) \cdot (\lambda - \bar{\lambda}_j) \quad (28)$$

where  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = e^{\Delta t \cdot \Omega_j \cdot (-\xi_j \pm i \cdot \sqrt{1-\xi_j^2})}$ .

From that then for natural frequencies and relative dampings are

$$\Omega_j = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j)]^2}{4} + \left[ \arccos\left(\frac{\lambda_j + \bar{\lambda}_j}{2 \cdot \sqrt{\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j}}\right) \right]^2} \quad (29)$$

$$\xi_j = \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j)]^2}{[\ln(\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j)]^2 + 4 \cdot \left[ \arccos\left(\frac{\lambda_j + \bar{\lambda}_j}{2 \cdot \sqrt{\lambda_j \cdot \bar{\lambda}_j}}\right) \right]^2}}, \quad (30)$$

which are similar formulas that were developed in a former part for 1-D.O.F system.

Multiplicity of  $\arccos$  function values in formulas (29) and (30) causes multiplicity of values  $\Omega_j$  and  $\xi_j$  too. However, it can be proved that if an interval of discretization holds to Nyquist theorem

$$\frac{\Omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi} < \frac{1}{2 \cdot \Delta t}, \quad (31)$$

možno uvažovať iba základnú hodnotu  $\arccos$  a potom sú  $\Omega_j$  a  $\xi_j$  určené jednoznačne.

## 5. Možnosti praktických aplikácií navrhnutého postupu

Metodika určovania štatisticky adekvátnych autoregresných modelov stochastických systémov a odvodené súvislosti medzi parametrami diskretných a spojitých modelov uvedených v predchádzajúcich kapitolách boli úspešne overené na prípade identifikácie mechanickej dynamickej sústavy obrábacieho stroja počas obrábania s overovaním jeho aplikačných možností pri adaptívnom geometrickom riadení v reálnom čase [3] a pri analýze spätnoväzobného systému (obrábací stroj - rezný proces) [4]. Uvedené súvislosti však možno s výhodou využiť tiež pri určovaní vybraných modálnych charakteristík mechanickej dynamickej sústavy.

V súčasnosti je najpoužívanejším postupom pri experimentálnom skúmaní dynamickej charakteristik rôznych systémov a konštrukcii aplikácia metód určovania matic dynamickej poddajnosti a modálnej analýzy tvarov kmitov konštrukcií.

Vďaka rozšíreniu digitálnych analyzátorov spektier založených na aplikácii algoritmu rýchlej Fourierovej transformácie je najčastejší postup založený na určovaní spektier budenia a odoziev sústavy. Ich prostredníctvom možno určiť prenosové funkcie, z ktorých sa potom odvodzujú informácie o vlastných frekvenciách a tvaroch kmitov sústavy.

Vzhľadom na prezentované súvislosti sa ukazuje ako možný postup získania niektorých modálnych informácií využitie experimentálne získaných časových postupností hodnôt vibrácií sústavy meraných súčasne vo viacerých miestach konštrukcie. To znamená zovšeobecnenie uvedených poznatkov na tzv. *Vektorové autoregresné modely s kľavými prímermi* - VARMA modely, ktoré možno vo všeobecnosti popísať maticovou rovnicou v operátorovom tvare ako [3]

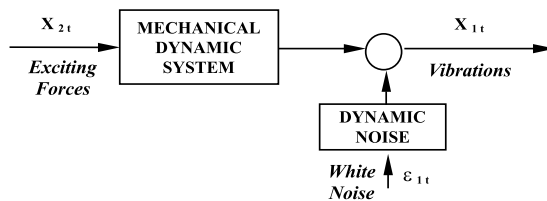
$$(A_0 - A_1 \cdot B^1 - A_2 \cdot B^2 - \dots - A_n \cdot B^n) \cdot X_t = (1 - D_1 \cdot B^1 - D_2 \cdot B^2 - \dots - D_{n-1} \cdot B^{n-1}) \cdot \epsilon_t \quad (32)$$

pre ktorú platí podobne ako v skalárnom prípade

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ E(\epsilon_t \cdot \epsilon_{t-n}) &= \delta_k \cdot \sigma_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (33)$$

a kde  $X_t$  a  $\epsilon_t$  sú vektory postupností meraní a bieleho šumu,  $A_i$  a  $D_i$  sú matice parametrov sústavy,  $B$  je vektor operátorov spätného posunutia,  $\sigma_\epsilon^2$  je matica rozptylu a vzájomných korelácií a  $\delta_k$  je Kroneckerova delta funkcia.

To znamená, že ak pri analýze mechanickej sústavy využijeme výpočtovú techniku a jej budiace sily i vibrácie sú snímané v diskretných časových intervaloch  $\Delta t$ , je možné odvodiť diskretné modely popisujúce závislosti výstupu systému (vibrácie) na vstupoch (budiace



Obr. 7. Bloková schéma dynamiky mechanického systému  
Fig. 7. Block scheme of mechanical system dynamics

then it is possible to take into account just the principal value of  $\arccos$  function and values of  $\Omega_j$  and  $\xi_j$  are the determined unambiguously.

## 5. Possibilities of proposed procedure practical applications

The method for determining of adequate autoregressive models of stochastic systems and developed relationships between parameters of discrete and continuous models shown in former chapters were successfully verified on case of identification of mechanical dynamic system of machine tool during cutting with its application by adaptive geometrical control in real time [3] and by analysis of feed-back system (machine tool - cutting) [4]. Shown connections can be utilized by determining modal characteristics of mechanical dynamics systems, too.

The most used procedure of experimental investigation of dynamic characteristics of different systems and structures at present is the application of dynamic compliance matrices determination and analysis of structure modes. Due to digital analyzers of spectra extension working on the principle of Fast Fourier Transform the most frequently used procedure is the one based on spectra determination of excitation and output of the system. Using them one can get transfer functions of the system and connected information of natural frequencies and structure modes.

Due to presented connections it shows as possible procedure of some modal information obtaining use of experimentally acquired time series of structure vibrations measured simultaneously in multiple points of the structure.

It means to generalise involved information to *Vector Autoregressive Moving Average Models* - VARMA models, which are in general case described by matrix formulas in operator form [3] as

for which holds similarly as in scalar case attached

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ E(\epsilon_t \cdot \epsilon_{t-n}) &= \delta_k \cdot \sigma_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (33)$$

and where  $X_t$  and  $\epsilon_t$  are vectors of measurements and white noise series,  $A_i$  and  $D_i$  are matrix of system parameters,  $B$  is vector of back-shift operators,  $\sigma_\epsilon^2$  is matrix of dispersion and reciprocal correlation's and  $\delta_k$  is Kronecker delta function.

It means, if one analyses a mechanical dynamic system with a numerical technique and its vibrations and exciting forces measure in uniform sampling intervals  $\Delta t$ , it is possible to develop discrete models to describe the relationship between

sily). Potom blokovú schému modelu vhodného pre identifikáciu meracieho miesta mechanickej dynamickej sústavy možno znázorniť podľa obr. 7.

Dynamika mechanickej sústavy je potom určená diskretnou prenosovou funkciou v tvare

$$H(B) = \frac{A_1(B)}{A_2(B)} = \frac{-a_{120} + a_{121} \cdot B + a_{122} \cdot B^2 + \dots + a_{12n} \cdot B^n}{1 - a_{111} \cdot B - a_{112} \cdot B^2 - \dots - a_{11n} \cdot B^n}, \quad (34)$$

kde  $B$  je operátor spätného posunutia ( $X_{t-1} = B \cdot X_t$ ) a  $a_{ijk}$  sú neznáme hľadané parametre.

Podobne možno dynamiku šumu vyjadriť prenosovou funkciou v tvare

$$N(B) = \frac{D(B)}{A_2(B)} = \frac{1 - d_{111} \cdot B - d_{112} \cdot B^2 - d_{113} \cdot B^3 - \dots - d_{11(n-1)} \cdot B^{n-1}}{1 - a_{111} \cdot B - a_{112} \cdot B^2 - \dots - a_{11n} \cdot B^n} \quad (35)$$

kde koeficienty  $d_{ijk}$  je potrebné určiť.

Za predpokladu, že neexistuje spätná väzba medzi vibráciami konštrukcie a budením (čo je pri testoch konštrukcií splnené) z rovníc (34) a (35) vyplýva výsledný model dynamiky konštrukcie v tvare

$$(1 - a_{111} \cdot B - a_{112} \cdot B^2 - \dots - a_{11n} \cdot B^n) \cdot X_{1t} = (a_{120} + a_{121} \cdot B + \dots + a_{12n} \cdot B^n) \cdot X_{2t} + (1 - d_{111} \cdot B - d_{112} \cdot B^2 - \dots - d_{11(n-1)} \cdot B^{(n-1)}) \cdot \epsilon_{1t} \quad (36)$$

v ktorom platia predpoklady uvedené vo vzťahu (33).

Postup pri získavaní štatisticky adekvátnych modelov spočíva v nahradzovaní výstupných signálov (s využitím nelineárnej metódy najmenších štvorcov) modelmi s postupne sa zvyšujúcim rádom dovtedy, pokiaľ pokles súčtu štvorcov odchýlok prestane byť štatisticky významný na zvolenej hladine významnosti.

Fyzikálny zmysel tohto postupu spočíva v tom, že sa systém snažíme nahradiť modelom s najmenším počtom štatisticky významných tvarov kmitov. Pritom každé zvýšenie rádu modelu o 2, zavádza ďalší tvar kmitu (ďalší stupeň voľnosti), ktorého príspevok k správaniu sa konštrukcie je testovaný na zvolenej hladine významnosti. Ak jeho prínos nie je významný, za štatisticky adekvátny sa berie predchádzajúci model.

Potom výsledný diskretný model získaný ako štatisticky adekvátny a z neho odvodený model spojitý, znamená rozvoj odozvy systému do najmenšieho štatisticky významného počtu tvarov kmitov, ktoré sa pritom získajú priamo, bez toho, že by bolo potrebné robiť vopred nejaké subjektívne odhady [3], [5].

Po určení adekvátnych modelov ARMA pre zmeraný priebeh vibrácií možno s využitím rovnice (34) dosadením za  $B = e^{\omega \cdot t}$  určiť frekvenčné charakteristiky (prenosové funkcie vo frekvenčnej oblasti).

Pre prenosovú funkciu v diskretnom tvare platí

$$H(B) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1 - \lambda_i \cdot B}, \quad (37)$$

output (vibration) and input (exciting forces). After block scheme of available model for identification of measured location of mechanical dynamic system, it is possible to plot after Fig. 7.

Dynamics of the mechanical system is after determined by a discrete transfer function in form

where  $B$  is back-shift operator ( $X_{t-1} = B \cdot X_t$ ) and  $a_{ijk}$  are unknown searched parameters.

Similarly, it is possible to express noise dynamics by a discrete transfer function in form

where coefficients  $d_{ijk}$  is needed to determine.

Supposing non-existence of feedback between vibrations of structure can be expressed in its excitation, (which holds for structures tests) from equations (34) and (35) one gets a resulting model of structure dynamics in form

where attached assumptions shown in formula (33).

Procedure of statistically adequate models is getting concentrated in principle of output signals substituting (using non-linear least square method) with models of gradually increasing order until the decreased sum of squares becomes statistically non-significant on a chosen level of significance.

Physical meaning of such a procedure is that we are trying to substitute the system with a model with the lowest number of statistically significant modes of vibrations. During this procedure, each increase of model order by two introduces a further degree of freedom. If its contribution is not significant, the former model is taken as statistically adequate.

Then the resultant discrete model obtained as statistically adequate and from it is developed a model continuous which means the expansion of system response into minimum number of statistically significant modes which are obtained directly without any prior subjective judgement [3], [5].

After adequate ARMA model determination for curves of measured vibrations it is possible with using of equation (34) and substitution for  $B = e^{\omega \cdot t}$  to determine frequency characteristics (transfer functions in frequency area).

For transfer functions in discrete form holds

$$H(B) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1 - \lambda_i \cdot B}, \quad (37)$$

kde  $\lambda_i$  sú korene charakteristickej rovnice prenosovej funkcie (34) v tvare

$$(1 - a_{111} \cdot B - a_{112} \cdot B^2 - \dots - a_{11n} \cdot B^n = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i \cdot B). \quad (38)$$

Pretože väčšinou reálne oceľové konštrukcie majú nízke relatívne tlmenie, korene  $\lambda_i$  sú komplexné a vytvárajú komplexne združené páry. Potom vlastné frekvencie a relatívne tlmenie možno určiť zo vzťahov (29), (30), kde  $\lambda_i$  a  $\bar{\lambda}_i$  sú komplexne združené korene.

S využitím rovnice (37) a vyjadrením komplexných rezíduí v nej taktiež ako komplexne združené páry  $A_i = g_i + i \cdot h_i$  resp.  $A_i^* = g_i - i \cdot h_i$  možno získať známy vzťah pre prenosovú funkciu dynamickej mechanickej sústavy v spojitom čase rozvojom do vlastných tvarov kmitov vo forme

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{2 \cdot g_i \cdot s + 2 \cdot g_i \cdot \xi_i \cdot \Omega_i - 2 \cdot h_i \cdot \Omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}}{s^2 + 2 \cdot \xi_i \cdot \Omega_i \cdot s + \Omega_i^2} \quad (39)$$

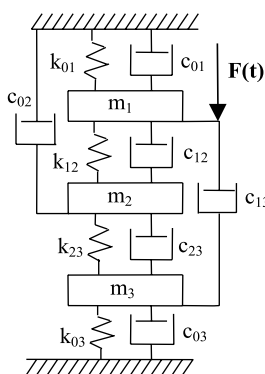
platného za predpokladu, že susedné vlastné frekvencie sú dostatočne vzdialené a modálna interferencia je zanedbateľná.

Súhrnne možno navrhnutý postup určovania modálnych charakteristík mechanickej konštrukcie vyjadriť nasledovne [6]:

1. Záznam budenia a odozvy konštrukcie v diskretných časových krokoch.
2. Získanie štatisticky adekvátnych modelov typu ARMA(n,n-1) resp. modelu VARMA.
3. Riešenie charakteristickej rovnice (38) a určenie jej koreňov.
4. Výpočet modálnych charakteristík - vlastné frekvencie  $\Omega_i$  a relatívne tlmenia  $\xi_i$  (29), (30).
5. Vyjadrenie prenosovej funkcie systému (34) pomocou parciálnych zlomkov (37) a určenie komplexných rezíduí  $A_i$ .
6. Určenie prenosovej funkcie vibrácií konštrukcie (35) prostredníctvom zistených komplexných rezíduí  $A_i$ .
7. Vykreslenie prenosových funkcií, tvarov kmitov atď.

Uvedený teoretický prístup bol overený na niekoľkých aplikovaných príkladoch. Pre ilustráciu je uvedený prístup demonštrovaný na jednoduchú trojmotovú mechanickej sústave (obr. 8) a zložitejšiu mechanickej konštrukciu - výložníku skutočného žeriava SŽ 1645 P.1, modelovaného prostredníctvom metódy konečných prvkov (obr. 10).

Pre prvotné posúdenie navrhovaného postupu bol zvolený jednoduchý trojmotový diskretný model mechanickej sústavy budenej náhodnou silou  $F(t)$  s normálnym rozložením amplitúd pôsobiacej v smere podľa obr. 8.



Obr. 8. Jednoduchý trojmotový mechanickej sústavy  
Fig. 8. Simple 3 D.O.F. mechanical system

Známym spôsobom určená sústava pohybových rovníc

$$M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t) \quad (40)$$

where  $\lambda_i$  are roots of characteristic equation of transfer function (34) in form

Because real steel structures have a mostly low damping ratio,  $\lambda_i$  roots are complex and form complex conjugate pairs. Then natural frequencies and relatively damping is possible to determine from (29), (30), where  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  are complex conjugate roots.

Exploiting equation (37) and expressing complex residuals in form of complex conjugate pairs as  $A_i = g_i + i \cdot h_i$  res.  $A_i^* = g_i - i \cdot h_i$  one can get a well known form of transfer function of mechanical dynamic system in continuous time using expansion into vibration modes in form

which holds for assumption that neighbour eigen-frequencies are distant enough and modal interference can be neglected.

A summary of the procedure of the structure modal characteristic identification is expressed as follows:

1. Recording of excitation and vibrations (output) in a uniform discrete time interval.
2. Acquiring of statistically adequate models ARMA (n, n-1) res. VARMA model.
3. Solution of characteristic equation and its roots determination.
4. Calculation of modal characteristics - eigen-frequencies  $\Omega_i$  and relative damping  $\xi_i$  (29), (30).
5. Expression of system transfer function (34) in form of partial fractions (37) and to determine complex residuals  $A_i$ .
6. Determination of transfer function of structure vibrations (35) by using to obtained complex residuals  $A_i$ .
7. Drawing of transfer functions, modes of vibrations etc.

The shown theoretical approach was verified on more examples of applications. To illustrate this the developed approach is demonstrated on a simple 3 degree of freedom (3 D.O.F.) mechanical system (Fig. 8) and more complicated structure - a jib of a real crane SŽ 1645 P.1, which was modelled by means of Finite Element Method (Fig. 10).

Basic parameters of system

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ m_2 &= 1 \\ m_3 &= 2 \\ k_{01} &= k_{12} = k_{23} = 100 \\ k_{03} &= 200 \\ c_{01} &= c_{02} = 0.8 \\ c_{12} &= c_{12} = 0.4 \\ c_{23} &= 0.6 \\ c_{03} &= 1.6 \\ \sigma_F^2 &= 10^2 \end{aligned}$$

For first tests of proposed procedure a simple 3 D.O.F. model of mechanical system was chosen. This was excited by random force  $F(t)$  with normal distribution which acts in direction after Fig. 8.

Well-known system of differential equations has the form

$$M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t) \quad (40)$$

nadobudla v tomto prípade tvar

in this case acquired form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,6 & -0,4 & -0,4 \\ -0,4 & 1,8 & -0,6 \\ -0,4 & -0,6 & 2,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & -100 & 0 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

z ktorého ľavej strany boli numericky určené (aplikáciou Fadejevovej a Bairstowovej metódy) teoretické vlastné frekvencie. Celá sústava bola riešená pri simulovanom buzení silou  $F(t)$ . Pri zvolen

from its left hand side were determined in a numerical way (using Fadejev and Bairstow methods) theoretical values of eigen-frequencies. Next the whole system was solved using simulation excita

nom intervale vzorkovania ( $\Delta t = 0,1 s$ ) bolo medzi každou vzorkou vykonaných 10 numerických integračných krokov metódou Runge-Kutta. Z kmitov každej hmoty bola vytvorená postupnosť 2000 hodnôt, pričom sa vzorky začali ukladať až po ustálení amplitúd vibrácií.

tion of force  $F(t)$ . A sampling interval of  $\Delta t = 0,1 s$  was chosen and between each sample were 10 steps of numerical integration performed using Runge - Kutta method. A time serie of 2000 values from vibrations of each mass was made. These samples were started after getting stationary values of vibrations amplitudes.

Aplikáciu postupu uvedeného v kapitole 3 bol získaný ako štatisticky adekvátny model ARMA (6,5). Jeho parametre pre kmity v hmotách sú uvedené v tab. 1. Určené vlastné frekvencie a relatívne tlmenia v porovnaní s teoretickými hodnotami sú uvedené v tab. 2.

Using a procedure developed in chapter three, the ARMA (6,5) model was obtained as statistically adequate. Its parameters are presented in Tab. 1. Calculated values of eigen-frequencies and relative damping and their comparison with theoretical values are shown in Tab. 2.

Parametre autoregresnej časti modelov ARMA

Tab. 1

Parameters of autoregressive parts of ARMA models

Tab. 1

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$X_{1t}$	1.5820	-2.8093	2.5325	-2.5329	1.2516	-0.7089
$X_{2t}$	1.3915	-2.4370	2.0704	-2.1175	0.9362	-0.5819
$X_{3t}$	1.5859	-2.8081	2.4854	-2.4907	1.2183	-0.7271

Hodnoty vlastných frekvencií a relatívnych tmení trojhmotovej sústavy

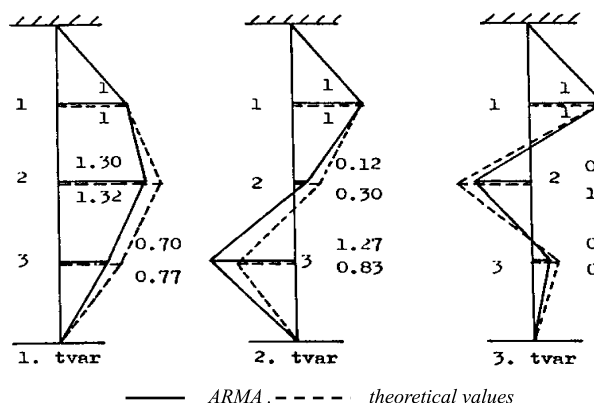
Tab. 2

Values of eigen-frequencies and relative damping of 3 D.O.F. system

Tab. 2

		1 <sup>st</sup> mode		2 <sup>nd</sup> mode		3 <sup>rd</sup> mode	
		$\Omega_1$	$\xi_1$	$\Omega_2$	$\xi_2$	$\Omega_3$	$\xi_3$
ARMA	$X_{1t}$	1.2958	0.04709	1.9647	0.06908	2.7945	0.02754
	$X_{2t}$	1.2926	0.03468	2.1071	0.13760	2.8203	0.03408
	$X_{3t}$	1.2941	0.03069	1.9788	0.04885	2.8152	0.04163
Teoretické		1.2926	0.05289	2.0621	0.06664	2.8297	0.05945

Z uvedených výsledkov je zrejмый dostatočný súlad experimentálnych a teoretických hodnôt netlmených vlastných frekvencií W. Relatívne nižšia presnosť hodnôt pomerného tlmenia  $\xi$  bola zapríčinená zvolenými nízkymi hodnotami koeficientov útlmu  $c_{ij}$ . Po určení koreňov charakteristickej rovnice boli získané i vlastné tvary kmitov, ktorých priebeh porovnaný s priebehom teoretickým je vykreslený na obr. 9.



Obr. 9. Získané tvary kmitov a ich porovnanie s teoretickými hodnotami  
Fig. 9. Obtained modes and their comparison with theoretical ones

From presented results a very good agreement between experimental and theoretical values of eigen-frequencies W. A relative lower accuracy of relative damping values  $\xi$  was caused probably by choosing of low values of coefficients  $c_{ij}$ . After getting characteristic equations roots the modes of vibration were obtained. Their comparison with theoretical values is shown in Fig. 9.

Model výložníka skutočného žeriava bol vytvorený v programe COSMOS/M s využitím prvkov

The crane jib model was made by means of program

typu BEAM3D a TRUSS3D a odobraté príslušné stupne voľnosti. MKP model výložníka bol pri simulácii budený pásmovo ohraničeným bielym šumom. Numerická integrácia bola realizovaná Newmarkovou metódou (10 krokov riešenia medzi každým bodom diskretizácie) pri nulových počiatočných podmienkach. Bolo zaznamenaných 2000 bodov priebehu výchyliek v každom sledovanom bode, pričom začiatok záznamu bol vykonaný až po dosiahnutí stationarity sledovaných procesov. Výsledky vykonaných experimentov sú prezentované v zostručnenej forme, prevažne vo forme obrázkov a tabuliek (obr. 10-11, tab. 3).

COSMOS/M using elements of BEAM-3D and TRUSS3D type. During simulation, the model was excited by band-limited white noise. Numerical integration used Newmark method (10 steps of solution for each point of discretization). Zero initial conditions and 2000 points of amplitudes were recorded in each chosen point of structure while the record started after the following processes became stationary.

The results of performed experiments are presented in a maximum brief, mostly of tables and pictures (Fig. 10-11 and Tab. 3).

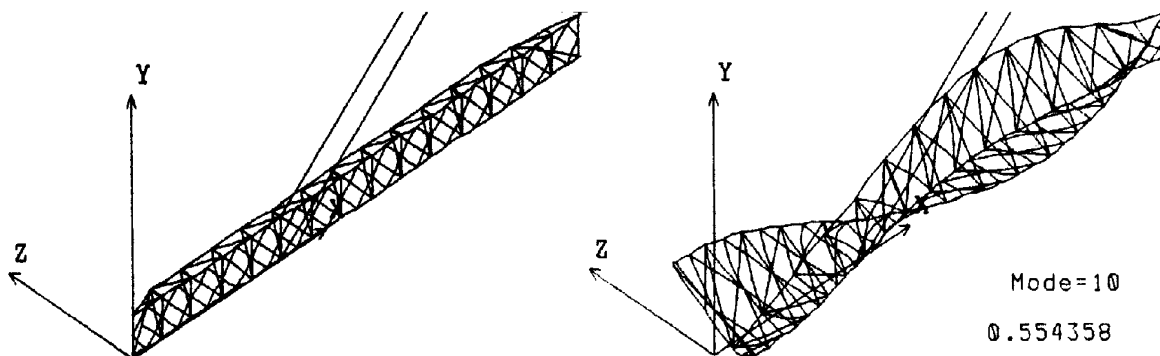
Porovnanie hodnôt vlastných frekvencií výložníka žeriava v sledovanom bode  
Comparison of Natural frequencies values of crane jib in multiple point

Tab. 3  
Tab. 3

	1 <sup>st</sup> Mode	2 <sup>nd</sup> Mode	3 <sup>rd</sup> Mode	4 <sup>th</sup> Mode	5 <sup>th</sup> Mode	6 <sup>th</sup> Mode
FEM	0,100652	0,100653	0,100810	0,100819	0,423949	1,10373
ARMA	Nonsign.	Nonsign.	Nonsign.	Nonsign.	Nonsign.	1,1042

	7 <sup>th</sup> Mode	8 <sup>th</sup> Mode	9 <sup>th</sup> Mode	10 <sup>th</sup> Mode	11 <sup>th</sup> Mode	12 <sup>th</sup> Mode
FEM	1,767421	2,184288	2,235258	3,483133	4,334549	4,34834
ARMA	1,7648	Nonsign.	2,2338	3,4866	Nonsign.	4,3571

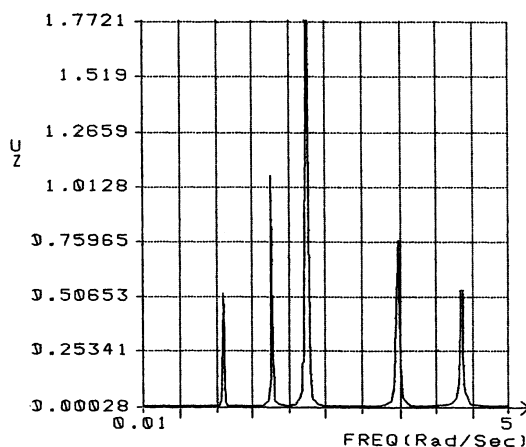


Obr. 10. MKP model výložníka žeriava a tvar konštrukcie v desiatom kroku simulácie  
Fig. 10. FEM model of crane jib and mode of structure in 10-th steps of simulation

Pozornosť je potrebné venovať faktu, že pri modeli výložníka žeriava bol zistený ako štatisticky adekvátny model ARMA(10,9) a bolo zistené, že iba 5 tvarov kmitov (obr. 11) má štatisticky významný prínos k dynamickému správaniu sa konštrukcie (na rozdiel od 12 tvarov určených štandardným postupom MKP).

## 6. Záver

Uvedená problematika bola navrhnutá a preverovaná v rámci riešenia grantovej



Obr. 11. Spektrálna výkonová hustota priebehu vibrácií v sledovanom bode modelu  
Fig. 11. Power spectral density of vibrations in chosen point of model

Special attention should be paid to the fact that the FEM model of crane jib as a statistically adequate ARMA (10,9) model was detected. That means that only five modes of structure vibrations (Fig. 11) have a statistically significant contribution to dynamic behaviour of structure (which differs from 12 modes determined by the standard FEM procedure). It is obvious that a proposed procedure can expressively reduce demands on dynamic calculations of mechanical structures.

## 6. Conclusions

Introduced problems were proposed and verified in a frame of grant research

úlohy VEGA č. 97/4226/97 „Identifikácia, modelovanie a riadenie stochastických dynamických systémov“, kde boli skúmané niektoré z možných aplikácií navrhnutého postupu identifikácie. Išlo najmä o spojenie navrhnutého identifikačného prístupu so systémami riešenia dynamiky zložitých konštrukcií strojov metódou konečných prvkov.

Výhoda využitia autoregresných modelov spočíva v skutočnosti, že ich parametre možno získať priamo zo získaných adekvátnych modelov bez toho, aby bolo potrebné určovať prenosové funkcie. Navyše je vylúčené akékoľvek subjektívne hodnotenie, pretože testy štatistickej adekvátnosti sú rigorózne definované.

Výstupy z riešenia ďalších problémov aplikáciou navrhnutého prístupu pri dynamickej analýze a identifikácii vybraných modálnych charakteristík mechanických systémov vykazovali relatívne dobrú zhodu medzi teoretickými a identifikovanými tvarmi kmitov, hodnotami vlastných frekvencií a hodnotami pomerných tlmení.

Z prezentovaných skutočností možno konštatovať, že vyššie uvedené predpoklady a teoretické východiská sú správne a že uvedený prístup môže výrazne znížiť náročnosť a zvýšiť efektívnosť dynamických výpočtov mechanických konštrukcií.

VEGA # 97/4226/97 „Identification, modelling and control of stochastic dynamic systems“ where some possible applications of the proposed identification procedure were investigated. It was namely a connection of proposed identification procedure with systems of complicated machine structures solution using Finite Elements Method.

The advantage of using autoregressive models consists of model parameters that can be determined directly from these models not to be necessary to determine transfer functions. In addition, any subjective judgement is eliminated because statistic adequacy tests are exactly defined.

Results of further problems using proposed procedure by dynamic analysis and identification of modal characteristics of mechanical systems showed a relatively good agreement between theoretical and identified modes of vibrations, eigen-frequencies and relative damping.

From the presented facts one can develop that above shown assumptions and theoretical starting points are correct, and the developed procedure can reduce the number of calculations in an expressive way and improve efficiency of mechanical structures dynamic calculation.

#### Literatúra - References:

- [1] WU, S. M.: *Dynamic Data Systems - A New Modelling Approach*. Transmission of ASME JEI, 1987.
- [2] PANDIT, S. M. - WU, S. M.: *Time Series and System Analysis Modelling*. University of Wisconsin, Madison 1989.
- [3] MÁČA, J.: *Modal Analyses of Mechanical Dynamic Systems*. (In Slovak). In: Proceedings of Conference „Identification and Stochastic Processes“, Poprad 1988.
- [4] MÁČA, J.: *Identification and Modelling of Mechanical Dynamic Systems using Time Series Theory*. (In Slovak). In: Proceedings of Workshop „A Stochastic Processes and Identification Mechanical Dynamic Systems“, ČSVTS pri VŠDS, Poprad 1989.
- [5] MÁČA, J.: *Identification and Modelling of Dynamic Systems*. (In Slovak). Monograph. Military faculty of UTC, Žilina 1991.
- [6] MÁČA, J. - LEITNER, B.: *Modelling of Non-stationary Processes by Means of Time Series*. In: Proceedings of International Workshop „Advances in Building and Using of Simulation Models - ASIS 98“, Krnov 1998.
- [7] LEITNER, B.: *Application of Adaptive AutoRegressive Moving Average Models In Identification of Dynamic Systems*. In: Proceedings of Scientific Conference “Transcom 99”, University of Žilina, Žilina 1999